Lösungen – Klasse 3

1. In einem Kino wurden die 32 Plätze einer Sitzreihe von 1 bis 32 durchnummeriert. Anna und Bea sitzen beide in dieser Reihe. Anna hat Platz 8 und Bea Platz 14. Wie viele Personen können in dieser Reihe zwischen Anna und Bea sitzen?
Bemerkung: Auf jedem Platz kann höchstens eine Person sitzen.

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

Lösung: Zwischen Anna und Bea befinden sich die Plätze 9, 10, 11, 12 und 13, also insgesamt 5 Plätze. Da auf jedem der Stühle höchstens eine Person sitzen kann, können zwischen Anna und Bea höchstens **5** Personen sitzen (wenn jeder dieser Plätze belegt ist). Es könnte aber auch sein, dass nur **4** Personen zwischen ihnen sitzen (wenn genau ein Platz nicht belegt ist) oder nur **3** Personen (wenn genau zwei Plätze nicht belegt sind).

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C

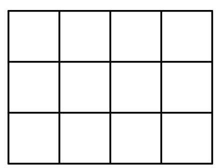
2. Jemand schreibt die Zahl 18 als Summe von verschiedenen Ziffern. Mit insgesamt wie vielen Ziffern ist dies möglich?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Lösung: 3 ist eine Lösung. Beispiel: $4+5+9 = 18$.
4 ist auch eine Lösung. Beispiel: $2+4+5+7 = 18$.
5 ist eine Lösung, denn $1+2+3+5+7 = 18$.
Schließlich ist **6** auch eine Lösung, da $0+1+2+3+5+7 = 18$.
2 ist hingegen keine Lösung. Begründung: Die Summe der zwei größten verschiedenen Ziffern ist $9+8=17$, also weniger als 18.

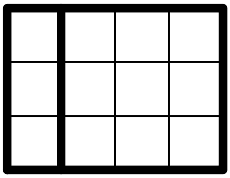
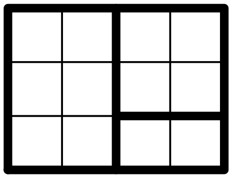
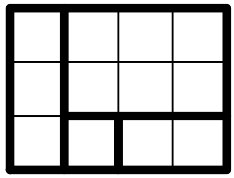
Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D, E

3. Jemand hat das 4×3 Rechteck entlang der Gitternetzlinien in kleinere Rechtecke zerschnitten. Keine zwei dieser kleineren Rechtecke sind gleich. In wie viele solche Rechtecke konnte man das 4×3 Rechteck insgesamt zerlegt haben?
Bemerkung: Quadrate zählen auch zu den Rechtecken.



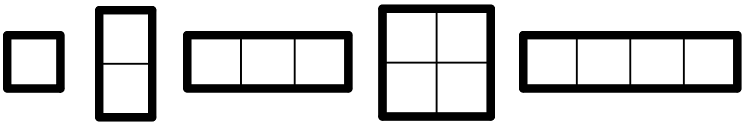
(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **2**, **3** und **4** Lösungen sind. Tatsächlich:

2 Rechtecke **3** Rechtecke **4** Rechtecke

In **Teil 2** zeigen wir, dass 5 keine Lösung darstellt. Begründung: Wenn wir die 5 kleinsten Rechtecke betrachten (siehe Figur), beinhalten diese bereits $1+2+3+4+4=14$ Kästchen. Dies geht aber nicht, da das Ausgangsrechteck aus nur 12 Kästchen (4×3) besteht.



Die 5 kleinsten Rechtecke

Beachte: Wenn 5 keine Lösung ist, dann ist auch 6 keine Lösung.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C

4. Im Wunderland gibt es nur zweierlei Münzen: 4 Gulden-Münzen und 5 Gulden-Münzen. Jede Geldsumme wird mit diesen Münzen bezahlt.
Die Frage: Bei welcher der aufgezählten Zahlen braucht man mindestens fünf Münzen, um sie bezahlen zu können?
Bemerkung: Es gibt kein Rückgeld, die Summen müssen genau stimmen.

(A) *18* **(B)** *19* **(C)** *20* **(D)** *21* **(E)** *22*

Lösung: 18, 19 und 20 können mit nur 4 Münzen bezahlt werden. Tatsächlich: $18=5+5+4+4$, $19=5+5+5+4$, $20=5+5+5+5$.
Beachte: $20=4+4+4+4+4$, also 20 *kann* zwar auch mit 5 Münzen bezahlt werden. Dies muss aber nicht sein, wegen $20=5+5+5+5$.
21 und **22** können mit nur 4 Münzen nicht bezahlt werden. Begründung: Die höchste Summe, die man mit nur 4 Münzen bezahlen kann, ist 20 – als 5 + 5 + 5 + 5. Da 21 und 22 größer sind als 20, reichen 4 Münzen nicht aus.
Sowohl 21 als auch 22 kann man mit 5 Münzen bezahlen. Tatsächlich:
$21=4+4+4+4+5$ und $22=4+4+4+5+5$.
Zusammengefasst: Nur bei **21** und **22** sind 5 Münzen erforderlich.

Die richtige(n) Antwort(en): D, E

5. Die Summe dreier verschiedener natürlicher Zahlen ist 10. Welche von diesen drei Zahlen kann die größte sein?
Lösungshinweis: Die natürlichen Zahlen sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 usw.

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

Lösung: Die größte Zahl kann **5**, **6** oder **7** sein. Dies zeigen folgende Summen: $10 = \mathbf{5} + 4 + 1$, $10 = \mathbf{6} + 3 + 1$, $10 = \mathbf{7} + 2 + 1$.
Die größte Zahl kann nicht die 8 sein. Begründung: Die anderen zwei Zahlen hätten als Summe 2. Aber 2 = 1 + 1 geht nicht, weil die Zahlen 1 und 1 nicht verschieden sind.
Die größte Zahl kann nicht die 9 sein. Begründung: Die anderen zwei Zahlen hätten als Summe 1. Aber 1 = 1 + 0 geht nicht, weil die Zahl 0 nicht vorkommen darf.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C

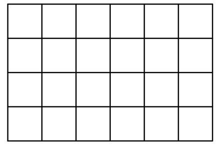
6. In einer Familie hat jeder Junge genau eine Schwester mehr als Brüder. Wie viele Kinder können insgesamt in dieser Familie sein?
Lösungshinweis: Die Frage bezieht sich auf die unten aufgeführten Zahlen.

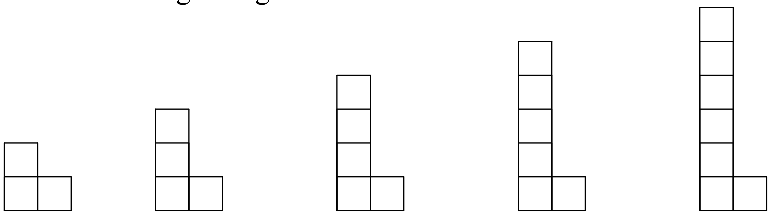
(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

Lösung: Wir arbeiten mit systematischem Probieren.
Nehmen wir an: Ein Junge hat 0 (also keine) Brüder. Dann ist er der einzige Junge, hat aber 1 Schwester (0 + 1). In diesem Fall sind genau 2 Kinder in der Familie.
Nehmen wir an: Jeder Junge hat genau 1 Bruder. Dann gibt es insgesamt 2 Brüder und sie haben 2 (1 + 1) Schwestern. In diesem Fall sind genau $2 + 2 = \mathbf{4}$ Kinder in der Familie.
Nehmen wir an: Jeder Junge hat genau 2 Brüder. Dann gibt es insgesamt 3 Brüder und sie haben 3 (2 + 1) Schwestern. In diesem Fall sind genau $3 + 3 = \mathbf{6}$ Kinder in der Familie.
Nehmen wir an: Jeder Junge hat genau 3 Brüder. Dann gibt es insgesamt 4 Brüder und sie haben 4 (3 + 1) Schwestern. In diesem Fall sind genau $4 + 4 = 8$ Kinder in der Familie.
Beachte: Würden wir die Anzahl der Brüder weiter erhöhen, bekämen wir noch mehr Kinder in der Familie. Dies ist aber nicht nötig, denn 8 ist schon größer als die größte aufgeführte Zahl 7.
Wir stellen fest: Von den aufgeführten Zahlen sind **4** und **6** Lösungen.

Die richtige(n) Antwort(en): B, D

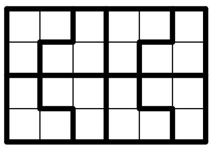
7. Das 6×4 Rechteck soll man mit L-Formen ohne Überlappungen auslegen. Bei welchen der aufgeführten Formen ist dies möglich?
Bemerkungen: Bei jeder Auslegung darf man nur eine der Formen verwenden, aber diese mehrmals. Die kleinen Quadrate sind überall gleich groß.



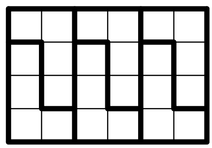


(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

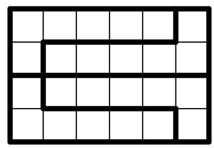
Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass mit den Figuren **(A)**, **(B)** und **(D)** Auslegungen möglich sind. Dazu geben wir je ein Beispiel an:



Auslegung mit (A)



Auslegung mit (B)



Auslegung mit (D)

In **Teil 2** zeigen wir, dass mit den Formen aus (C) und (E) keine Auslegung möglich ist. Begründung: Die Figur aus (C) besteht aus 5, die aus (E) aus 7 Kästchen. Das Ausgangsrechteck besteht aber aus $6 \cdot 4 = 24$ Kästchen. Da 24 weder durch 5 noch durch 7 teilbar ist, sind solche Auslegungen nicht möglich.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, D

8. Ein Kind lügt montags, dienstags und freitags. An den anderen Wochentagen sagt er die Wahrheit. An welchen Wochentagen konnte das Kind folgenden Satz gesagt haben?
„Vorgestern log ich und übermorgen werde ich ebenfalls lügen."

(A) *Montag* **(B)** *Dienstag* **(C)** *Mittwoch* **(D)** *Donnerstag* **(E)** *Freitag*

Lösung: Zunächst veranschaulichen wir die Wochentage. Wir betrachten eine volle Woche und noch zwei Tage vorher und zwei Tage nachher.

Sa. So. *Mo.* *Di.* Mi. Do. *Fr.* Sa. So. *Mo.* *Di.*

Jene Tage, an denen das Kind *lügt*, wurden *kursiv* dargestellt.
Nun untersuchen wir den Satz an allen aufgezählten Wochentagen.
Montag: Vorgestern ist Samstag und übermorgen ist Mittwoch. Der Satz „Vorgestern log ich und übermorgen werde ich ebenfalls lügen." ist eine Lüge. Da das Kind *montags* lügt, konnte es den Satz gesagt haben.
Dienstag: Vorgestern ist Sonntag und übermorgen ist Donnerstag. Der Satz „Vorgestern log ich und übermorgen werde ich ebenfalls lügen." ist eine Lü-

ge. Da das Kind *dienstags* lügt, konnte es den Satz gesagt haben.
Mittwoch: Vorgestern ist *Montag* und übermorgen ist *Freitag*. Der Satz „Vorgestern log ich und übermorgen werde ich ebenfalls lügen." ist wahr. Da das Kind mittwochs die Wahrheit sagt, konnte es den Satz gesagt haben.
Donnerstag: Vorgestern ist *Dienstag* und übermorgen ist Samstag. Der Satz „Vorgestern log ich und übermorgen werde ich ebenfalls lügen." kann nicht wahr sein, denn am Samstag lügt das Kind nicht. Der Satz ist also gelogen. Da das Kind donnerstags aber nicht lügt, kann es den Satz am Donnerstag nicht gesagt haben.
Freitag: Vorgestern ist Mittwoch und übermorgen ist Sonntag. Der Satz „Vorgestern log ich und übermorgen werde ich ebenfalls lügen." ist eine Lüge. Da das Kind *freitags* lügt, konnte es den Satz gesagt haben.
Bemerkung: Man kann begründen, dass das Kind den Satz auch am Sonntag hätte sagen können.
Anregung: Der geneigte Leser möge dies zeigen.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, E

9. Zu einer zweistelligen geraden Zahl (also durch 2 teilbar), zählt man beide Ziffern dieser Zahl hinzu. Im Ergebnis zählt man nun alle Ziffern zusammen. Welche Zahl kann beim Zusammenzählen der Ziffern entstehen?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

Lösung: 1 kann entstehen. Begründung: Wenn die ursprüngliche Zahl 86 ist, dann gilt: $86+(8+6)=100$ und $1+0+0=\mathbf{1}$.

2 kann entstehen. Begründung: Wenn die ursprüngliche Zahl 10 ist, dann gilt: $10+(1+0)=11$ und $1+1=\mathbf{2}$.

3 kann entstehen. Begründung: Wenn die ursprüngliche Zahl 24 ist, dann gilt: $24+(2+4)=30$ und $3+0=\mathbf{3}$.

4 kann entstehen. Begründung: Wenn die ursprüngliche Zahl 92 ist, dann gilt: $92+(9+2)=103$ und $1+0+3=\mathbf{4}$.

5 kann entstehen. Begründung: Wenn die ursprüngliche Zahl 16 ist, dann gilt: $16+(1+6)=23$ und $2+3=\mathbf{5}$.

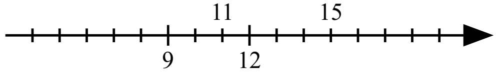
Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D, E

10. Entlang eines geradlinigen Weges stehen nach jedem ganzen Kilometer Steine, die mit ganzen Zahlen durchnummeriert sind. Wie viele solche Steine gibt es insgesamt, die vom 9-Kilometer-Stein zweimal so weit entfernt liegen wie vom 12-Kilometer-Stein?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

Lösung: Wir veranschaulichen die Straße samt Meilensteine.
Rechts von 12 ist nur **15** eine Lösung. Tatsächlich, 15 ist 3 km von 12 und 6 km von 9 entfernt. 6 ist das Zweifache von 3.

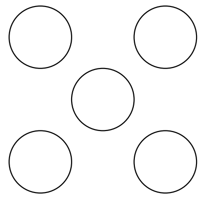
Zwischen 9 und 12 ist nur **11** eine Lösung. Tatsächlich, 11 ist 1 km von 12 und 2 km von 9 entfernt. 2 ist das Zweifache von 1.



Links von 9 gibt es <u>keine</u> Lösung. Begründung: Diese Zahlen liegen näher bei 9 als bei 12. Daher kann es <u>nicht</u> sein, dass sie von 9 zweimal so weit entfernt sind als von 12.
Es gibt also insgesamt **zwei** Steine.

Die richtige(n) Antwort(en): C

11. Schreibt je eine Ziffer so in die fünf Kreise, dass folgende zwei Bedingungen *gleichzeitig* erfüllt werden:

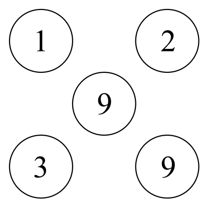


1. Die Summe der drei Ziffern aus den unteren zwei Kreisen und dem mittleren Kreis ist das Siebenfache der Summe der anderen zwei Ziffern *und*
2. Die Summe der drei Ziffern aus den zwei rechts liegenden Kreisen und dem mittleren Kreis ist das Fünffache der Summe der anderen zwei Ziffern.

Welche der unten aufgeführten Ziffern kann in einem der Kreise vorkommen?
<u>Lösungshinweis</u>: Die Ziffer 0 (Null) darf man nicht verwenden.

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *8* **(E)** *9*

Lösung: Durch mehrmaliges Probieren entstehen die Ziffern aus der Figur. Wir führen die Probe durch:



Die Summe der oberen zwei Ziffern ist 1 + 2 = 3, die Summe der anderen drei Ziffern ist 3 + 9 + 9 = 21. Das Siebenfache von 3 ist 21. Es stimmt also.
Die Summe der linken zwei Ziffern ist 1 + 3 = 4, die Summe der anderen drei Ziffern ist 2 + 9 + 9 = 20. Das Fünffache von 4 ist 20. Es stimmt also.
<u>Bemerkung</u>: Es lässt sich zeigen, dass nur die Ziffern aus der Figur beide Bedingungen erfüllen.
Von den aufgeführten Ziffern kommen **2**, **3** und **9** vor.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, E

12. In einem zoologischen Garten leben viele Affen. Ein Affe ist an einem Tag nur dann glücklich, wenn er an dem Tag drei unterschiedliche Obstsorten gegessen hat. Heute gibt es 4 Äpfel, 6 Aprikosen, 8 Orangen und 10 Bananen. Wie viele Affen können heute insgesamt glücklich werden?

(A) *6* **(B)** *7* **(C)** *8* **(D)** *9* **(E)** *10*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **9** eine Lösung ist. Zum Beispiel dann, wenn 1 Affe einen Apfel, eine Aprikose und eine Banane bekommt, 3 Affen je einen Apfel, eine Orange und eine Banane erhalten und 5 Affen je eine Ap-

rikose, eine Orange und eine Banane erhalten. Dann gibt es 9 (1 + 3 + 5) glückliche Affen. Es wurden 4 Äpfel, 6 Aprikosen, 8 Orangen und 9 Bananen verbraucht.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **8** eine Lösung ist. Dies können wir erreichen, wenn bei der Verteilung aus Teil 1 die Banane eines Affen ein anderer Affe erhält.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **7** eine Lösung ist. Dies können wir erreichen, wenn bei der Verteilung aus Teil 1 die Bananen zweier Affen andere Affen erhalten.
In **Teil 4** zeigen wir, dass **6** eine Lösung ist. Dies können wir erreichen, wenn bei der Verteilung aus Teil 1 die Bananen dreier Affen andere Affen erhalten.
In **Teil 5** zeigen wir, dass 10 keine Lösung ist. Begründung: Damit 10 Affen glücklich werden, bräuchte man 30 Obststücke ($10 \cdot 3$). Heute gibt es aber nur 28 Obststücke ($4+6+8+10$). Da 28 kleiner als 30 ist, ist 10 keine Lösung.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D

13. Sophia denkt sich vier unterschiedliche natürliche Zahlen. Daniel weiß davon, kennt aber keine der Zahlen. Sophia verrät Daniel zunächst die Summe der zwei kleinsten Zahlen. Dies reicht Daniel aber nicht aus, um diese zwei Zahlen herauszufinden. Daraufhin verrät Sophia außerdem, dass die Summe aller vier Zahlen 15 beträgt. Damit kann Daniel nun alle vier Zahlen herausfinden.
Welche der aufgeführten Zahlen konnte sich Sophia ausgedacht haben?
Lösungshinweis: Die natürlichen Zahlen sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 usw.
Bemerkung: Zum Herausfinden der Zahlen musste Daniel nicht raten. Er konnte sich durch Nachdenken seiner Lösung sicher sein.

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

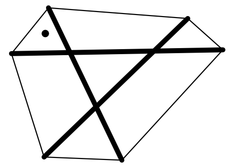
Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass die Summe der zwei kleinsten Zahlen 5 ist. Begründung: 5 kann auf zwei Arten entstehen: $1+4=5$ oder $2+3=5$. Daher konnte Daniel die zwei kleinsten Zahlen nicht herausfinden (sie könnten ja entweder 1 und 4 oder 2 und 3 sein). Bei 4 oder 3 wären die zwei kleinsten Zahlen hingegen eindeutig gewesen, denn 3 = 1 + 2 und 4 = 1 + 3 (4 = 2 + 2 geht nicht, da die Zahlen unterschiedlich sein müssen). Bei 3 oder 4 hätte also Daniel die zwei kleinsten Zahlen herausfinden können.
Beachte: Die Summe der zwei kleinsten Zahlen kann nicht 6 oder mehr sein.
Dies schildern wir an einem Beispiel: 6 = 2 + 4. Die Summe der anderen zwei Zahlen muss also 9 sein (15 – 6). Andererseits sind die anderen zwei Zahlen größer als 2 und 4, also kommen nur 5, 6, 7, 8 und 9 in Frage. Die Summe keiner dieser zwei Zahlen ergibt jedoch 9 (z. B. 5 + 6 = 11).
Anregung: Der geneigte Leser möge weitere Beispiele untersuchen.
In **Teil 2** ermitteln wir alle vier Zahlen. Die Summe der zwei kleinsten Zahlen ist 5 (siehe Teil 1). Die Summe der anderen zwei Zahlen muss damit 10 sein (15 – 5).
Feststellung: Die kleinste der anderen zwei Zahlen ist mindestens 4. Begründung: Einerseits ist $1+4=5$ oder $2+3=5$. Andererseits müssen die anderen Zahlen größer sein als die ersten zwei Zahlen.
10 kann man nun nur noch so darstellen: 10 = 4 + 6.

Beachte: 10 = 5 + 5 geht nicht, da alle Zahlen verschieden sein müssen.
Damit brauchen wir die Zahl 4 unbedingt für die Darstellung von 10. Daher entfällt die Möglichkeit $1+4=5$ für die 5, es bleibt nur $2+3=5$.
Wir haben gezeigt, dass Sophia an die Zahlen **2**, **3**, **4** und 6 denken musste.

Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D

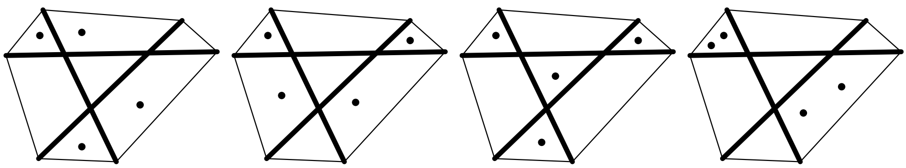
Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. Die Figur zeigt einen Garten mit drei Wegen (die **fett** eingezeichneten Strecken). Im Garten steht ein Baum (er wurde durch den Punkt dargestellt). Euer Auftrag besteht darin, 3 weitere Bäume so zu pflanzen, dass auf beiden Seiten der drei Wege je genau 2 Bäume stehen. Zeichnet 4 unterschiedliche Möglichkeiten!



Lösungshinweis: Fertigt für jede der 4 Möglichkeiten eine getrennte Figur an!

Lösung: Die folgenden Figuren zeigen die 4 Möglichkeiten:



Für jede korrekte Figur gibt es je 4 Punkte (maximal 16 Punkte). Für falsche oder unvollständige Figuren gibt es keine Teilpunkte.