Lösungen – Klasse 7

1. Jemand hat die Länge eines Rechtecks um 77 cm erhöht und die Breite um 1 cm verringert. Der Flächeninhalt des Rechtecks

(A) *nahm dabei auf jeden Fall zu.* **(B)** *nahm dabei auf jeden Fall ab.*

(C) *kann dabei unverändert geblieben sein.*

(D) *muss dabei nicht zugenommen haben.*

(E) *muss dabei nicht abgenommen haben.*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **(D)** stimmt und (A) <u>nicht</u> stimmt. Dazu betrachten wir ein 100 cm × 2 cm Rechteck mit dem Flächeninhalt 200 cm². 100 cm um 77 cm erhöht ergibt 177 cm, 2 cm um 1 cm verringert ergibt 1 cm. Damit ist der neue Flächeninhalt 177 cm². 177 cm² ist kleiner als 200 cm². Dies bedeutet: **(D)** stimmt und (A) stimmt <u>nicht</u>.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **(E)** stimmt und (B) stimmt <u>nicht</u>. Dazu betrachten wir ein 10 cm × 10 cm Rechteck mit dem Flächeninhalt 100 cm². 10 cm um 77 cm erhöht ergibt 87 cm, 10 cm um 1 cm verringert ergibt 9 cm. Damit ist der neue Flächeninhalt 783 cm² ($87 \cdot 9 = 783$). 783 cm² ist größer als 100 cm². Dies bedeutet: **(E)** stimmt und (B) stimmt <u>nicht</u>.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **(C)** stimmt. Dazu betrachten wir ein 770 cm × 11 cm Rechteck mit dem Flächeninhalt 8470 cm² ($770 \cdot 11$). 770 cm um 77 cm erhöht ergibt 847 cm, 11 cm um 1 cm verringert ergibt 10 cm. Damit ist der neue Flächeninhalt 8470 cm² ($847 \cdot 10$). Beide Flächeninhalte sind 8470 cm². Dies bedeutet: **(C)** stimmt.
Bemerkung zu Teil 3: Das Ausgangsrechteck sei $a \times b$ mit dem Flächeninhalt $a \cdot b$. Es entsteht ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $(a+77)\cdot(b-1)$. Die zwei Flächen sind gleich, wenn $a \cdot b = (a+77)\cdot(b-1)$.
Oder, umgeformt, $ab = ab - a + 77b - 77 \;\Leftrightarrow\; a = 77b - 77$. Das Beispiel aus Teil 3 entstand mit $b = 11$ und $a = 77 \cdot 11 - 77 = 770$.
<u>Anmerkung</u>: Es lässt sich zeigen, dass die Gleichung $a = 77b - 77$ unendlich viele Lösungen hat. Es gibt also sogar unendlich viele Rechtecke, deren Flächeninhalt unverändert bleibt.

Die richtige(n) Antwort(en): C, D, E

2. Jemand hat die größte vierstellige Zahl aufgeschrieben, die keine zwei gleiche Ziffern hat und die durch 7 teilbar ist. Welche der aufgeführten Ziffern kommen in dieser Zahl vor?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *3* **(D)** *6* **(E)** *8*

Lösung: Diese vierstellige Zahl hat die Form $\overline{987x}$. Sie wird nämlich dann am größten, wenn die Tausenderziffer eine 9, die Hunderterziffer eine 8 und die Zehnerziffer eine 7 ist. Für x setzen wir nun nach und nach die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, und 6 ein (7, 8 und 9 entfallen, weil die Zahl keine zwei gleichen

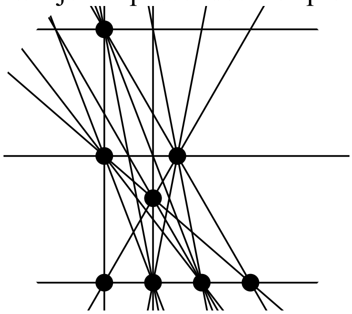
Ziffern haben darf). 9870 ist teilbar durch 7 (9870 : 7 = 1410). Die anderen Ziffern liefern Zahlen, die durch 7 nicht teilbar sind. Beispiel: 9871 ist nicht teilbar durch 7, denn 9871 : 7 = 1410, Rest 1 (und nicht 0).
Anregung: Der geneigte Leser möge die anderen Ziffern selbst prüfen.
Die vierstellige Zahl lautet daher 9870, in der die Ziffern **0** und **8** vorkommen.

Die richtige(n) Antwort(en): A, E

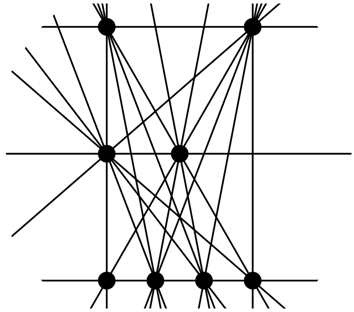
3. In der Ebene sind 8 (verschiedene) Punkte angegeben. 4 von ihnen liegen auf einer Geraden. Von den anderen vier Punkten (die nicht auf dieser Geraden liegen) gibt es keine drei, die auf einer Gerade liegen. Wie viele verschiedene Geraden gibt es insgesamt, die durch jeweils mindestens 2 der 8 Punkte verlaufen?

(A) *15* **(B)** *17* **(C)** *19* **(D)** *23* **(E)** *24*

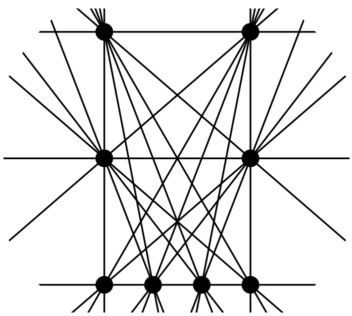
Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **15**, **17**, **19** und **23** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an:



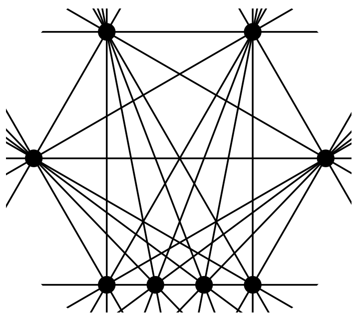
15 Geraden



17 Geraden



19 Geraden



23 Geraden

In **Teil 2** zeigen wir, dass 24 keine Lösung ist. Begründung: In jedem der Beispiele mit 15, 17 und 19 Geraden gibt es mindestens 3 Punkte, die auf einer Geraden liegen (neben den 4 Punkten, die nach Aufgabenstellung auf einer Geraden liegen). Solche Geraden werden aber nur *einmal* (und *nicht* dreimal) gezählt. Im Beispiel mit 23 Geraden hingegen liegen nur die 4 Punkte aus der Aufgabenstellung auf einer Geraden. Jede weitere Verbindung zweier Punkte führt stets auf eine neue Gerade. Daher ist 23 die größte Anzahl von denkbaren Geraden. Da 24 größer als 23 ist, ist 24 nicht möglich.

Alternativlösung zu Teil 2: 2 Punkte bestimmen eine Gerade. Jeder der 8 Punkte kann mit 7 weiteren Punkten verbunden werden. Es entstehen damit $8 \cdot 7$ Geraden. Da so aber jede Gerade zweimal gezählt wird (z. B. *AB* und *BA*), müssen wir dieses Ergebnis noch durch 2 teilen: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

Es gibt also höchstens 28 Geraden durch 8 Punkte. Wir betrachten nun jene 4 Punkte, die nach Aufgabenstellung auf einer Geraden liegen. Für diese 4 Punkte würden nach dem obigen Gedankengang $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ Geraden entstehen. In Wirklichkeit entsteht aber nur eine einzige Gerade, also 5 weniger (6 – 1). 28 – 5 = 23 ist somit die höchste Anzahl der Geraden. 24 ist daher <u>nicht</u> möglich.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D

4. Ein Rechteck hat die Breite 18 cm und die Länge 24 cm. Jemand ändert (verlängert oder verkürzt) sowohl die Breite als auch die Länge. Die eine Änderung (Verlängerung oder Verkürzung) ist zweimal so groß wie die andere. Aus dem Rechteck entsteht ein Quadrat. **Die Frage**: Wie viele cm lang kann die Seite dieses Quadrates sein?

(A) *12* **(B)** *16* **(C)** *20* **(D)** *22* **(E)** *30*

Lösung: Wir bezeichnen die zwei Änderungen (in cm) mit x und $2x$ ($x > 0$). Es ist noch offen, ob die Breite oder die Länge mit x geändert wurde und ob die Änderungen Kürzungen oder Verlängerungen darstellen. Wir untersuchen nun alle denkbaren Fälle.

<u>1. Fall</u>: Die Breite wurde um x und die Länge um $2x$ verkürzt. Es entstehen die Längen $18 - x$ und $24 - 2x$. Quadrat bedeutet $18 - x = 24 - 2x$. Diese Gleichung hat als Lösung $x = 6$. Die Seitenlänge des Quadrates ist somit **12** cm ($18 - 6 = 12$ und $24 - 2 \cdot 6 = 12$).

<u>2. Fall</u>: Die Breite wurde um $2x$ und die Länge um x verkürzt. Es entstehen die Längen $18 - 2x$ und $24 - x$. Quadrat bedeutet $18 - 2x = 24 - x$. Diese Gleichung hat als Lösung $x = -6$. Dies geht jedoch <u>nicht</u> (wegen $x > 0$).

<u>3. Fall</u>: Die Breite wurde um $2x$ verkürzt und die Länge um x verlängert. Es entstehen die Längen $18 - 2x$ und $24 + x$. Quadrat bedeutet $18 - 2x = 24 + x$. Diese Gleichung hat als Lösung $x = -2$. Dies geht jedoch <u>nicht</u> (wegen $x > 0$).

<u>4. Fall</u>: Die Breite wurde um x verlängert und die Länge um $2x$ verkürzt. Es entstehen die Längen $18 + x$ und $24 - 2x$. Quadrat bedeutet $18 + x = 24 - 2x$. Diese Gleichung hat als Lösung $x = 2$. Die Seitenlänge des Quadrates ist somit **20** cm ($18 + 2 = 20$ und $24 - 2 \cdot 2 = 20$).

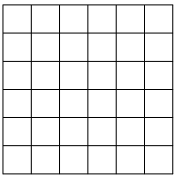
<u>5. Fall</u>: Die Breite wurde um x und die Länge um $2x$ verlängert. Es entstehen die Längen $18 + x$ und $24 + 2x$. Quadrat bedeutet $18 + x = 24 + 2x$. Diese Gleichung hat als Lösung $x = -6$. Dies geht jedoch <u>nicht</u> (wegen $x > 0$).

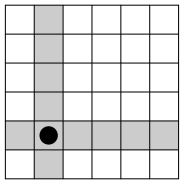
<u>6. Fall</u>: Die Breite wurde um $2x$ und die Länge um x verlängert. Es entstehen die Längen $18 + 2x$ und $24 + x$. Quadrat bedeutet $18 + 2x = 24 + x$. Diese

Gleichung hat als Lösung $x = 6$. Die Seitenlänge des Quadrates ist somit **30** cm ($24+6=30$ und $18+2\cdot 6=30$).
7. Fall: Die Breite wurde um x verkürzt und die Länge um $2x$ verlängert. Es entstehen die Längen $18 - x$ und $24 + 2x$. Quadrat bedeutet $18 - x = 24 + 2x$. Diese Gleichung hat als Lösung $x = -2$. Dies geht jedoch nicht (wegen $x > 0$).
8. Fall: Die Breite wurde um $2x$ verlängert und die Länge um x verkürzt. Es entstehen die Längen $18 + 2x$ und $24 - x$. Quadrat bedeutet $18 + 2x = 24 - x$. Diese Gleichung hat als Lösung $x = 2$. Die Seitenlänge des Quadrates ist somit **22** cm ($24-2=22$ und $18+2\cdot 2=22$).
Die Quadratseitenlänge kann also **12** cm, **20** cm, **22** cm oder **30** cm betragen.

Die richtige(n) Antwort(en): A, C, D, E

5. Jemand stellt auf einem 6×6 Schachbrett (*Figur 1*) 9 Türme auf. Türme können sich in der Zeile und der Spalte bewegen, in denen sie stehen. In *Figur 2* wurden jene Felder schraffiert, die durch einen Turm bedroht werden.

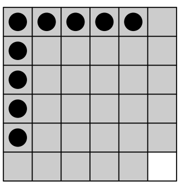

Figur 1

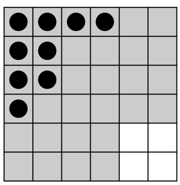

Figur 2

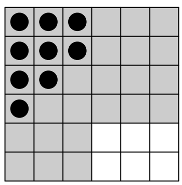
Die Frage: Wie viele Felder des Brettes kann es insgesamt geben, die von keinem der 9 Türme bedroht werden?

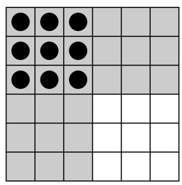
(A) *1* **(B)** *4* **(C)** *6* **(D)** *8* **(E)** *9*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **1**, **4**, **6** und **9** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an. Die weißen Felder sind diejenigen, die von keinem Turm bedroht sind.

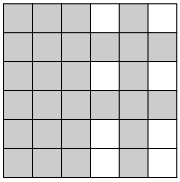

1 Feld


4 Felder

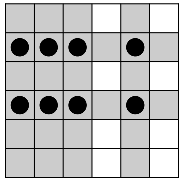

6 Felder


9 Felder

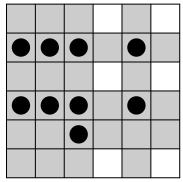
In **Teil 2** zeigen wir, dass 8 keine Lösung ist. Im *1. Schritt* untersuchen wir ein Beispiel: Nehmen wir an, dass alle 9 Türme in den Reihen 3 und 5 von unten und in den Spalten 1, 2, 3 und 5 von links stehen. Die schraffierten Felder werden bedroht, die 8 weißen Felder nicht (siehe *Figur 3*). Wir versuchen nun, so viele Türme wie möglich auf die grauen Felder von *Figur 3* zu stellen, so dass die 8 weißen Felder nicht bedroht werden. Wir können aber nur 8 Türme aufstellen (siehe *Figur 4*). Wenn wir auch noch den neunten Turm aufs Brett stellen, verringert sich die Anzahl der weißen Felder (eine Möglichkeit hierfür zeigt z.B. *Figur 5*).



Figur 3



Figur 4



Figur 5

Im *2. Schritt* untersuchen wir den allgemeinen Fall. Nehmen wir an, dass sich die 9 Türme in a Reihen und b Spalten des Brettes befinden (Im 1. Schritt war $a = 2$ und $b = 4$). Dann gibt es einerseits $(6-a)\cdot(6-b)$ Felder, die nicht bedroht werden. Andererseits muss die Anzahl dieser Felder 8 ergeben. Daraus folgt: $(6-a)\cdot(6-b) = 8$. Wir untersuchen nun alle Möglichkeiten, wie 8 als Produkt von zwei positiven ganzen Zahlen dargestellt werden kann.

<u>1. Möglichkeit</u>: $4 \cdot 2 = 8$. Dann ist $6 - a = 4$ und $6 - b = 2$, also $a = 2$ und $b = 4$. Dies ist gerade das Beispiel aus dem 1. Schritt. Wir haben aber schon gesehen, dass es in diesem Fall <u>nicht</u> möglich ist, 9 Türme wie gefordert aufzustellen.

<u>2. Möglichkeit</u>: $2 \cdot 4 = 8$. Dann ist $6 - a = 2$ und $6 - b = 4$, also $a = 4$ und $b = 2$. Dies ist das Beispiel aus dem 1. Schritt, allerdings wurde das Brett um 90° gedreht. Es bleibt weiterhin <u>nicht</u> möglich, 9 Türme wie gefordert aufzustellen.

<u>3. Möglichkeit</u>: $1 \cdot 8 = 8$. Es ist $6 - a = 1$ und $6 - b = 8$, also $a = 5$ und $b = -2$. Dies geht jedoch <u>nicht</u>, da b <u>nicht</u> negativ werden kann.

<u>4. Möglichkeit</u>: $8 \cdot 1 = 8$. Es ist $6 - a = 8$ und $6 - b = 1$, also $a = -2$ und $b = 5$. Dies geht jedoch <u>nicht</u>, da a <u>nicht</u> negativ werden kann.

Die Untersuchung aller Möglichkeiten ergab, dass 8 <u>keine</u> Lösung ist.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, E

6. Jemand betrachtet zwei ganze Zahlen a und b, für die $a+b=100$ gilt. Er berechnet nun mit diesen Zahlen den Term $7a+3b$. Welche der unten aufgeführten Zahlen kann er als Ergebnis erhalten?

(A) *256* **(B)** *310* **(C)** *343* **(D)** *356* **(E)** *10 000*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **256**, **356** und **10000** Lösungen sind. Tatsächlich:

Für $a = -11$ und für $b = 111$ ist $7 \cdot (-11) + 3 \cdot 111 = -77 + 333 = \mathbf{256}$

Für $a = 14$ und für $b = 86$ ist $7 \cdot 14 + 3 \cdot 86 = 98 + 258 = \mathbf{356}$

Für $a = 2425$, $b = -2325$ ist $7 \cdot 2425 + 3 \cdot (-2325) = 16975 - 6975 = \mathbf{10000}$

In **Teil 2** zeigen wir, dass 310 und 343 <u>keine</u> Lösungen sind.

Im *1. Schritt* formen wir den Term $7a+3b$ um. Aus $a + b = 100$ folgt $b=100-a$. Damit gilt: $7a+3b=7a+3(100-a)=300+4a$.

Im *2. Schritt* zeigen wir, dass 310 <u>keine</u> Lösung ist. Begründung: $300 + 4a$ ist teilbar durch 4 (300 und 4 sind beide teilbar durch 4). Aber 310 ist <u>nicht</u> teilbar durch 4 (310 : 4 = 77, Rest 2 und <u>nicht</u> 0).

Im *3. Schritt* zeigen wir, dass 343 <u>keine</u> Lösung ist. 300 + 4*a* ist teilbar durch 4 (300 und 4 sind beide teilbar durch 4). Aber 343 ist <u>nicht</u> teilbar durch 4.

Die richtige(n) Antwort(en): A, D, E

7. Jemand hat die Felder einer 3×3 Tabelle so mit natürlichen Zahlen gefüllt, dass die Summe zweier benachbarter Zahlen stets 3 ist. Wie viel kann die Summe der neun Zahlen der Tabelle betragen?
<u>Bemerkung</u>: Zwei Zahlen sind dann benachbart, wenn ihre Felder eine gemeinsame Seite besitzen.

(A) *12* **(B)** *13* **(C)** *14* **(D)** *15* **(E)** *16*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **12**, **13**, **14** und **15** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an:

0	3	0
3	0	3
0	3	0

Summe **12**

1	2	1
2	1	2
1	2	1

Summe **13**

2	1	2
1	2	1
2	1	2

Summe **14**

3	0	3
0	3	0
3	0	3

Summe **15**

In **Teil 2** zeigen wir, dass 16 <u>keine</u> Lösung ist. Zunächst füllen wir lediglich zwei Felder aus (siehe *Figur 1*). Laut Bedingung gilt $a + b = 3$. Wir wenden nun die Bedingung für weitere benachbarte Felder an und erhalten der Reihe nach *Figur 2*, *Figur 3* und schließlich *Figur 4*.

a	b	

Figur 1

a	b	a
b	a	

Figur 2

a	b	a
b	a	b
a	b	

Figur 3

a	b	a
b	a	b
a	b	a

Figur 4

Wir berechnen nun die Summe der neun Zahlen aus *Figur 4*: $5a + 4b$. Aus $a + b = 3$ folgt $5a + 4b = 5a + 4(3 - a) = 12 + a$. Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zeigen, dass 16 <u>keine</u> Lösung ist. Begründung: $12 + a = 16$ bedeutet $a = 4$. Aus $a + b = 3$ folgt $4 + b = 3$, also $b = -1$. Dies geht aber <u>nicht</u>, da b eine natürliche Zahl sein muss.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D

8. Alle Winkelweiten eines Dreiecks sind Primzahlen (in Grad gemessen). Wie viele solche Dreiecke gibt es insgesamt?
<u>1. Bemerkung</u>: Die Reihenfolge der drei Primzahlen spielt keine Rolle.
<u>2. Bemerkung</u>: Eine Primzahl hat genau 2 Teiler: Die 1 und sich selbst.

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass eine der drei Winkelweiten 2° sein muss. Begründung: 2 ist die einzige gerade Primzahl. Wenn keine der drei Winkel-

weiten 2 wäre, dann wären alle drei Winkelweiten ungerade Zahlen. Die Summe dreier ungerader Zahlen ist ungerade. Dies geht aber nicht, denn die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° (also eine gerade Zahl).
Feststellung: Die anderen zwei Winkelweiten ergeben insgesamt 178. (*)
In **Teil 2** ermitteln wir alle Lösungen. Unser Ansatz ist die Feststellung (*). Wir arbeiten mit systematischem Probieren. In jeder Spalte ist die Summe der zwei Zahlen 178. Die Zahlen aus den oberen Reihen sind die Primzahlen in steigender Reihenfolge. Wir haben jene Spalten markiert, bei denen die untere Zahl ebenfalls eine Primzahl ist. Da die Reihenfolge keine Rolle spielt, befinden sich in den oberen Reihen die kleineren Zahlen.

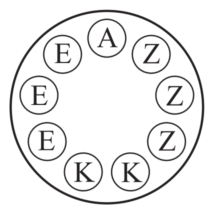
3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
175	173	171	167	165	161	159	155	149	147	141

41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
137	135	131	125	119	117	111	107	105	99	95	89

175 ist keine Primzahl, da sie durch 5 teilbar ist. 171 ist keine Primzahl, da sie durch 3 teilbar ist. $161 = 7 \cdot 23$ und ist ebenfalls keine Primzahl.
Anregung: Der geneigte Leser möge weitere Zahlen prüfen.
Das Zusammenzählen ergibt insgesamt **7** Lösungen.

Die richtige(n) Antwort(en): D

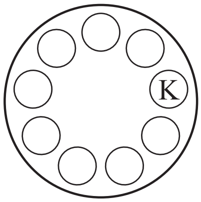
9. Auf einen Teller hat man 9 runde Dosen gestellt: 3 mit Erdbeeren (E), 3 mit Zwetschgen (Z), 2 mit Kirschen (K) und eine mit Aprikosen (A). Man kann den Dosen ihren Inhalt nicht ansehen, sie sehen alle gleich aus und sind gleichmäßig verteilt (siehe Figur). Diana kennt die Anordnung der Dosen. Da der Teller aber in ihrer Abwesenheit gedreht wurde, weiß sie nun nicht mehr, in welcher Dose sich welche Frucht befindet.



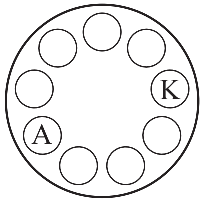
Die Frage: Was ist die kleinste Anzahl von Dosen, die Diana öffnen muss, um mit Sicherheit sagen zu können, in welcher Dose die Aprikosen sind?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

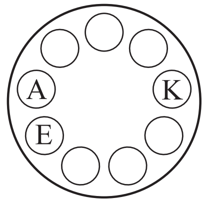
Lösung: Wenn Diana Glück hat, kann sie die Dose mit Aprikosen gleich beim ersten Versuch finden. Dies ist aber keineswegs sicher. Wir werden nun zeigen, dass die Öffnung von **2** Dosen stets ausreicht um mit Sicherheit sagen zu können, wo die Aprikosen sind. Wir untersuchen mehrere Fälle:
1. Fall: Diana öffnet zunächst eine Dose mit Kirschen (siehe *Figur 1*). Diana öffnet dann als zweite Dose die vierte Dose im Uhrzeigersinn. Wenn in dieser die Aprikosen sind (siehe *Figur 2*), ist die Suche beendet. Wenn in ihr jedoch Erdbeeren sind, muss die gesuchte Dose die nächste sein (siehe *Figur 3*).



Figur 1

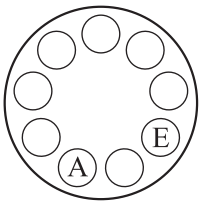


Figur 2

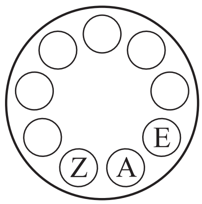


Figur 3

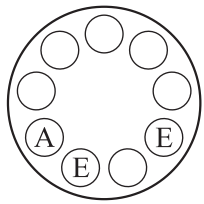
<u>2. Fall</u>: Diana öffnet zunächst eine Dose mit Erdbeeren. Dann öffnet sie die zweite Dose im Uhrzeigersinn. Wenn diese Aprikosen enthält, ist die Suche beendet (siehe *Figur 4*). Wenn in ihr jedoch Zwetschgen sind, muss die Dose mit Aprikosen zwischen den zwei geöffneten Dosen liegen (siehe *Figur 5*). Wenn in der zweiten Dose Erdbeeren sind, müssen die Aprikosen in der nächsten Dose sein (siehe *Figur 6*).



Figur 4

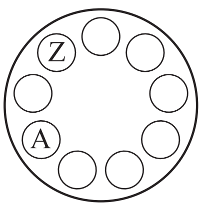


Figur 5

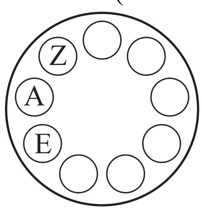


Figur 6

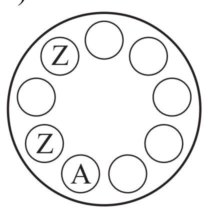
<u>3. Fall</u>: Diana öffnet zunächst eine Dose mit Zwetschgen. Dann öffnet sie die zweite Dose im Gegenuhrzeigersinn. Wenn diese Aprikosen enthält, ist die Suche beendet (siehe *Figur 7*). Wenn in der zweiten Dose jedoch Erdbeeren sind, muss die Dose mit Aprikosen zwischen den zwei geöffneten Dosen liegen (siehe *Figur 8*). Wenn in der zweiten Dose aber Zwetschgen sind, müssen die Aprikosen in der nächsten Dose sein (siehe *Figur 9*).



Figur 7



Figur 8



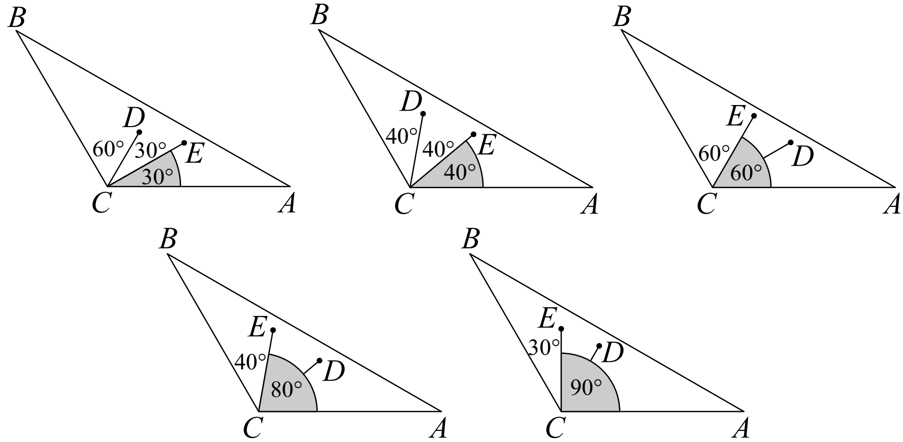
Figur 9

Die richtige(n) Antwort(en): A

10. Im Dreieck *ABC* beträgt die Weite des Winkels $\sphericalangle ACB$ 120°. Die Punkte *D* und *E* liegen im Inneren des Dreiecks. *C* wird mit *D* und mit *E* verbunden. Sowohl *CD* als auch *CE* halbieren irgendeinen der entstandenen Winkel aus dem Inneren des Dreiecks mit der Spitze *C*.
Die Frage: Wie groß kann der Winkel $\sphericalangle ACE$ sein?

(A) *30°* **(B)** *40°* **(C)** *60°* **(D)** *80°* **(E)** *90°*

Lösung: Alle fünf Antworten sind möglich, wie die fünf Figuren zeigen.



Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D, E

11. Auf eine Geburtstagsparty kommen nach 20:00 Uhr immer noch einzelne Gäste an. Jeder neue Gast gibt allen bereits anwesenden Gästen die Hand. Insgesamt gab es 30 solche Händedrücke nach 20:00 Uhr. **Die Frage**: Wie viele Gäste können insgesamt nach 20:00 Uhr angekommen sein?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Lösung: Nehmen wir an, dass um 20:00 Uhr n Gäste anwesend waren. Wir untersuchen nun nach und nach die aufgeführten Zahlen.
2 neue Gäste A und B: Jeder von ihnen gibt allen n Gästen die Hand. Das sind $2n$ Händedrücke. Außerdem gibt es noch einen Händedruck (AB). Somit erfolgen insgesamt $2n$ +1 Händedrücke. Laut Bedingung gilt $2n + 1 = 30$ oder $2n = 29$, also $n = 14{,}5$. Dies geht aber nicht, denn n muss eine ganze Zahl sein. 2 ist daher keine Lösung.
3 neue Gäste A, B und C: Jeder von ihnen gibt allen n Gästen die Hand. Das sind $3n$ Händedrücke. Außerdem gibt es noch drei Händedrücke (AB, AC, BC). Somit erfolgten insgesamt $2n$ +3 Händedrücke. Es gilt $3n + 3 = 30$ oder $3n = 27$, also $n = 9$. Damit stellt **3** eine Lösung dar.
4 neue Gäste A, B, C und D: Jeder von ihnen gibt allen n Gästen die Hand. Das sind $4n$ Händedrücke. Außerdem gibt es noch sechs Händedrücke (AB, AC, BC, AD, BD, CD). Somit erfolgten insgesamt $4n$ +6 Händedrücke. Es gilt $4n + 6 = 30$ oder $4n = 24$, also $n = 6$. Damit stellt **4** eine Lösung dar.
5 neue Gäste A, B, C, D und E: Jeder von ihnen gibt allen n Gästen die Hand. Das sind $5n$ Händedrücke. Außerdem gibt es noch zehn Händedrücke (AB, AC, BC, AD, BD, CD, AE, BE, CE, DE). Somit gibt es insgesamt $5n$ +10 Händedrücke. Es gilt $5n + 10 = 30$ oder $5n = 20$, also $n = 4$. Damit stellt **5** eine Lösung dar.
6 neue Gäste A, B, C, D, E; F: Jeder von ihnen gibt allen n Gästen die Hand. Das sind $6n$ Händedrücke. Außerdem gibt es noch 15 Händedrücke (AB, AC,

BC, *AD*, *BD*, *CD*, *AE*, *BE*, *CE*, *DE*, *AF*, *BF*, *CF*, *DF*, *EF*). Somit gibt es insgesamt $6n + 15$ Händedrücke. Aus $6n + 15 = 30$ folgt $n = 2{,}5$. Dies geht aber nicht, denn n muss eine ganze Zahl sein. 6 ist daher keine Lösung.

Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D

12. Eine positive ganze Zahl heißt *glücklich*, wenn
I. Sie als Summe von (nicht unbedingt verschiedenen) positiven ganzen Zahlen dargestellt werden kann *und*
II. Die Summe der Kehrwerte der Summanden aus I. die Zahl 1 ergibt.

Beispiel: 11 ist glücklich, da $11 = 2 + 3 + 6$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

Frage: Welche der aufgeführten Zahlen sind glücklich?

(A) *4* **(B)** *6* **(C)** *8* **(D)** *9* **(E)** *24*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **4** eine Lösung ist. Tatsächlich, $4 = 2 + 2$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **9** eine Lösung ist. Tatsächlich, $9 = 3 + 3 + 3$ und $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$.
Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass alle Quadratzahlen glücklich sind.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **24** eine Lösung ist. Denn: $24 = 2 + 4 + 6 + 12$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$.
In **Teil 4** begründen wir, dass 6 keine Lösung ist.
Feststellung: Bei der Bedingung II. sind zwei Summanden nicht geeignet. Begründung: z. B. $2 + 4 = 6$ aber $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$. Man kann prüfen, dass bei II. zwei Summanden stets ungeeignet sind.
Wir versuchen nun, 6 mit Hilfe von drei Summanden darzustellen. Beispiel: $2 + 2 + 2 = 6$, aber $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1$. Man kann prüfen, dass bei II. drei Summanden stets ungeeignet sind.
Beachte: Vier oder mehr Summanden sind bei II. ebenfalls ungeeignet. Denn: Mindestens ein Summand wäre 1. Der Kehrwert von 1 ist ebenfalls 1, d. h. die Summe der Kehrwerte wäre daher größer als 1. Damit ist II. nicht erfüllt.
Anregung: Der geneigte Leser möge den obigen Gedankengang ergänzen.
In **Teil 5** begründen wir, dass 8 keine Lösung ist.
Feststellung: Bei der Bedingung II. sind zwei Summanden ungeeignet. Begründung: z. B. $8 = 3 + 5$ aber $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} < 1$. Man kann prüfen, dass bei II. zwei Summanden stets ungeeignet sind.
Wir versuchen nun, 8 mit Hilfe von drei Summanden darzustellen.

Beispiel: 8 = 3 + 3 + 2, aber $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}>1$. Man kann prüfen, dass bei II. drei Summanden stets ungeeignet sind.
Beachte: Vier oder mehr Summanden sind bei II. ebenfalls ungeeignet.
Beispiel: 8 = 2 + 2 + 2 + 2 aber $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}>1$. Man kann prüfen, dass bei II. vier Summanden stets ungeeignet sind.
Anregung: Der geneigte Leser möge den obigen Gedankengang ergänzen.
Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass es insgesamt nur dreizehn Zahlen gibt, die nicht glücklich sind: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 19, 21, 23.

Die richtige(n) Antwort(en): A, D, E

13. Mit einer positiven zweistelligen Zahl führt man Folgendes durch:
I. Man multipliziert die Zahl mit 2.
II. Im Ergebnis von I. vertauscht man zwei Ziffern.
III. Das Ergebnis von II. teilt man durch 2.
Das Ergebnis von III. soll wieder die ursprüngliche Zahl ergeben.
Die Frage: Mit wie vielen zweistelligen Zahlen gelingt dies insgesamt?

(A) *0* **(B)** *4* **(C)** *mindestens 9* **(D)** *mindestens 14* **(E)** *mindestens 18*

Lösung: In **Teil 1** führen wir eine Bezeichnung ein und formulieren einige Feststellungen. Die ursprüngliche zweistellige positive Zahl sei n.
1. Feststellung: Das Ergebnis von II. ist teilbar durch 2.
2. Feststellung: Im Ergebnis von II. müssen zwei gleiche Ziffern vorkommen. Denn: Nur so kann das Ergebnis von III. die ursprüngliche Zahl werden.
3. Feststellung: Das Ergebnis von II. ist zwei- oder dreistellig. Begründung: Das Zweifache einer zweistelligen Zahl ist zweistellig oder dreistellig.
In **Teil 2** führen wir eine Fallunterscheidung durch. Unser Ansatz ist die 3. Feststellung.
1. Fall: Das Ergebnis von II. ist zweistellig. Dieses Ergebnis muss aus zwei gleichen Ziffern bestehen. Begründung: Nur so kann man als Ergebnis von III. die ursprüngliche Zahl bekommen. $2n$ könnte also 22, 44, 66 oder 88 sein. Damit ist n 11, 22, 33, oder 44. Diese 4 Zahlen erfüllen die Bedingungen.
Probe mit $n = 33$: $33 \xrightarrow{\text{I.}} 66 \xrightarrow{\text{II.}} 66 \xrightarrow{\text{III.}} 33$.
2. Fall: Das Ergebnis von II. ist dreistellig, d. h. $100 \le 2n < 200$. Es folgt:
4. Feststellung: Die Hunderterziffer von $2n$ ist die 1.
Wir untersuchen nun verschiedene Möglichkeiten. Unser Ansatz ist Schritt II.
1. Möglichkeit: Man hat im Ergebnis von I. die Hunderterziffer mit der Zehnerziffer vertauscht. $2n$ kann dann folgende Werte annehmen: 110, 112, 114, 116, oder 118. Damit ist n 55, 56, 57, 58, oder 59. Diese 5 Zahlen erfüllen die Bedingungen. Probe mit $n = 57$:
$57 \xrightarrow{\text{I.}} 114 \xrightarrow{\text{II.}} 114 \xrightarrow{\text{III.}} 57$.
Anregung: Der geneigte Leser möge die 1. Möglichkeit weiter prüfen.

2. Möglichkeit: Man hat im Ergebnis von I. die Einerziffer mit der Zehnerziffer vertauscht. $2n$ kann dann folgende Werte annehmen: 100, 122, 144, 166, oder 188. Damit ist n 50, 61, 72, 83 oder 94. Diese 5 Zahlen erfüllen ebenfalls die Bedingungen. Probe mit $n = 83$:

$83 \xrightarrow{\text{I.}} 166 \xrightarrow{\text{II.}} 166 \xrightarrow{\text{III.}} 83.$

Anregung: Der geneigte Leser möge die 2. Möglichkeit weiter prüfen.

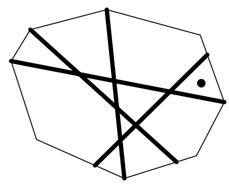
3. Möglichkeit: Man hat im Ergebnis von I. die Hunderterziffer mit der Einerziffer vertauscht. Aus der 4. Feststellung folgt: Die Einerziffer im Ergebnis von II. ist die 1. Dieses Ergebnis ist also durch 2 nicht teilbar, was jedoch wegen der 1. Feststellung nicht geht. Die 3. Möglichkeit liefert also keine Lösung.

Zusammengefasst: Es gibt insgesamt $4 + 5 + 5 = \mathbf{14}$ solche Zahlen.

Die richtige(n) Antwort(en): C, D

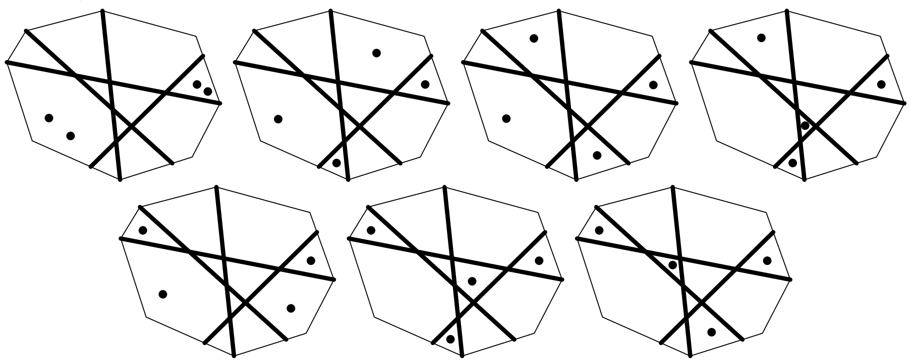
Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. Die Figur zeigt einen Garten mit vier Wegen (die **fett** eingezeichneten Strecken). Im Garten steht ein Baum (er wurde durch den Punkt dargestellt). Euer Auftrag besteht darin, 3 weitere Bäume so zu pflanzen, dass auf beiden Seiten der vier Wege je genau 2 Bäume stehen. Zeichnet 7 unterschiedliche Möglichkeiten!



Fertigt für jede der 7 Möglichkeiten eine getrennte Figur an!

Lösung: Die folgenden Figuren zeigen die 7 Möglichkeiten:



Für die ersten fünf korrekten Figuren (egal welche fünf) gibt es je 2 Punkte. Für die weiteren zwei Figuren gibt es je 3 Punkte (maximal 16 Punkte). Für falsche oder unvollständige Figuren gibt es keine Teilpunkte.