„Blick ins Buch“ Bolyai Teamwettbewerb 2015

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

Klasse 12

2. Ein unerfahrener Sultan sucht sich Ehefrauen für seinen Harem. Es melden sich 100 wunderschöne Frauen. 100 Ehefrauen sind aber doch zu viel! Der Sultan möchte also einige Frauen so auswählen, dass er dabei die anderen nicht verletzt. Er bespricht sich mit seinem weisen Kadi, woraus sich folgende Vorgehensweise ergibt:
Die 100 Frauen werden in 100 aufeinanderfolgende Zimmer eingesperrt. Die Schlösser sind so gebaut, dass sie sich durch eine Drehung öffnen und durch die nächste Drehung wieder schließen (und so weiter).
Nachdem die Frauen alle eingesperrt in ihren Zimmern sitzen, schickt der Sultan einen Wachmann los, der jedes Schloss dreht. Danach schickt er einen zweiten Wachmann los, der jedes zweite Schloss dreht. Nachher folgt ein dritter Wachmann, der jedes dritte Schloss dreht usw. Der hundertste Wachmann dreht schließlich nur das hundertste Schloss. Der Sultan nimmt nur jene Frauen in seinen Harem auf, deren Tür jetzt offen ist.
Die Frage: Wie viele Frauen sind es?

(A) *1* **(B)** *4* **(C)** *10* **(D)** *16* **(E)** *50*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass am Ende genau jene Türen *offen* sein werden, deren Schlösser *ungerade* oft gedreht wurden. Begründung: Am Anfang waren alle Türen abgeschlossen. Nach der 1. Drehung war eine Tür offen, nach der 2. Drehung war sie zu, nach der 3. Drehung war sie wieder offen usw.
In **Teil 2** zeigen wir, dass das Schloss der Tür k genauso oft gedreht worden ist, wie die Anzahl der Teiler von k, wobei $k \in \{1, 2, \ldots, 100\}$.
Begründung am Zahlenbeispiel $k = 12$: Dieses Schloss wurde vom 1. Wachmann (er dreht jedes Schloss), vom 2. Wachmann (er dreht jedes zweite Schloss), vom 3. Wachmann (er dreht jedes dritte Schloss), vom 4. Wachmann (er dreht jedes vierte Schloss), vom 6. Wachmann (er dreht jedes sechste Schloss) und vom 12. Wachmann (er dreht jedes zwölfte Schloss) gedreht. Die Teiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6 und 12.
<u>Beachte</u>: Der obige Gedankengang lässt sich für alle Türen ähnlich führen.
In **Teil 3** zeigen wir, dass am Ende genau jene Türen *offen* sein werden, deren Ordnungszahl eine *Quadratzahl* darstellt.
Aus Teil 1 und Teil 2 folgt:

Feststellung: Am Ende werden jene Türen offen sein, deren Ordnungszahlen eine ungerade Anzahl von Teilern haben.
Behauptung: Nur die Quadratzahlen haben eine ungerade Anzahl von Teilern.
Begründung an zwei Zahlenbeispielen:
Zahlenbeispiel $k = 30$. 30 ist *keine Quadratzahl*. Wir zählen die Teiler von 30 in Zweiergruppen auf: 1 und 30, 2 und 15, 3 und 10, 5 und 6. Es sind insgesamt $4 \cdot 2 = 8$ Teiler – eine *gerade* Zahl.

Zahlenbeispiel $k = 36$. 36 ist eine *Quadratzahl*, $36 = 6 \cdot 6 = 6^2$. Wir zählen die Teiler von 36 in Zweiergruppen auf: 1 und 36, 2 und 18, 3 und 12, 4 und 9, 6 und 6. Wir erhalten diesmal jedoch keine $5 \cdot 2 = 10$ Teiler, da die Zahl 6 nicht zweimal gezählt werden darf. Korrekt sind daher insgesamt $4 \cdot 2 + 1 = 9$ Teiler – eine *ungerade* Zahl.
Beachte: Der obige Gedankengang lässt sich für alle Zahlen ähnlich führen.
In **Teil 4** ermitteln wir die gesuchten Türen. Die Quadratzahlen von 1 bis 100 sind: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 und 100 – also insgesamt **10** Zahlen.

(A) 0% **(B)** 5% **(C) 58%** **(D)** 16% **(E)** 16%

11. Von den Zahlen 1, 2, 3, 4, …, 99, 100 wurden zehn gestrichen. Anschließend wählen wir aus den übriggebliebenen Zahlen welche so aus, dass (bei ungeänderter Reihenfolge) unter ihnen die Differenz zweier benachbarter Zahlen konstant ist. Wie viele solche Zahlen lassen sich in jedem Fall auswählen, unabhängig davon, welche zehn Zahlen ursprünglich gestrichen wurden?

(A) *8* **(B)** *9* **(C)** *10* **(D)** *11* **(E)** *12*

Lösung: Teil 1 enthält Vorbemerkungen, die wir in der Lösung brauchen.
Man redet über eine *arithmetische Folge*, wenn die Differenz zweier benachbarter Zahlen konstant ist. Beispiel: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.
Wenn die erste Zahl a ist und die konstante Differenz d, dann sieht die arithmetische Folge so aus: $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots, a + (n-1)d$.
Beachte: Wegen der Fragestellung haben wir stets endlich viele Zahlen.
Wenn die ganze Zahl b die ganze Zahl c teilt, dann schreibt man $b \mid c$.
Beispiel: $5 \mid 30$.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **10** eine Lösung darstellt – und zwar unabhängig davon, welche zehn Zahlen gestrichen worden sind.
Dazu schreiben wir die 100 Zahlen in eine 10×10 Tabelle (siehe Abbildung). Jede Zeile und jede Spalte enthält 10 Zahlen.
1. Feststellung: Die Zahlen bilden sowohl in den Zeilen als auch in den Spalten arithmetische Folgen (in den Zeilen ist $d = 1$, in den Spalten $d = 10$).
Im Folgenden versuchen wir, alle arithmetischen Folgen der Länge 10 zu unterbinden.
Dazu müssen die 10 gestrichenen Zahlen so gewählt werden, dass alle Folgen aus Feststellung 1 unterbunden werden. Dazu muss aus allen Zeilen und Spalten der Tabelle je eine Zahl gestrichen werden.

Weiter müssen die 10 Streichzahlen aus unterschiedlichen Zeilen und Spalten sein. (Ansonsten gäbe es mindestens eine Zeile oder eine Spalte aus der keine Zahl gestrichen wurde.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Feststellung: Wenn aus einer Zeile die k-te Zahl, aus der nächsten Zeile die l-te Zahl gestrichen wurde, dann muss $l < k$ sein. Begründung: Ansonsten blieben zwischen diesen zwei Zahlen mindestens zehn aufeinanderfolgende Zahlen, die eine arithmetische Folge bilden mit $d = 1$. Beispiel: Wenn in der zweiten Zeile die Zahl 14 ($k = 4$) und in der dritten Zeile 25 ($l = 5$) gestrichen würde, dann würden diese zehn Zahlen: 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 eine arithmetische Folge bilden.
Anders ausgedrückt: Wenn in einer Zeile eine bestimmte Zahl gestrichen wurde, dann muss die in der nächsten Zeile gestrichene Zahl links von der obigen Zahl stehen.
3. Feststellung: Aus den bisherigen Feststellungen folgt: Die einzige Chance, alle arithemtischen Folgen der Länge 10 zu unterbinden, besteht darin, die zehn Zahlen aus der markierten Diagonale zu streichen: 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91.
Anregung: Der geneigte Leser möge die obige Aussage prüfen.
4. Feststellung: Nachdem die zehn Zahlen wie in der 3. Feststellung gestrichen wurden, können wir immer noch eine arithemtische Folge der Länge 10 finden: 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92 bilden eine solche Folge mit $d = 9$. Damit ist bewiesen: Alle arithmetischen Folgen der Länge 10 lassen sich nicht unterbinden. Daher ist **10** eine Lösung.
Beachte: Da **10** eine Lösung ist, stellen **8** und **9** ebenso Lösungen dar.
In **Teil 3** zeigen wir, dass 11 keine Lösung darstellt. Dazu streichen wir diese zehn Zahlen: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100.
5. Feststellung: Bei Division durch 11 ist der Rest bei allen obigen Zahlen 1. Zudem ergibt *nur* bei diesen Zahlen aus 1 bis 100 die Division durch 11 den Rest 1.

Gäbe es unter den übriggebliebenen Zahlen eine arithmetische Folge der Länge 11, dann hätte sie die Form $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ ...,\ a+10d$, wobei *a* und *d* natürliche Zahlen sind.

<u>6. Feststellung</u>: Bei der Division durch 11 gibt es genau 11 Reste: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10.

Wenn wir die Zahlen $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ ...,\ a+10d$ durch 11 teilen, kommen wegen der 5. Feststellung nur zehn Reste in Frage (alle außer 1). Es gibt also elf Zahlen aber nur zehn denkbare Reste. Daraus folgt: Es gibt zwei Zahlen mit demselben Rest bei Division durch 11. Diese seien $a+m\cdot d$ und $a+n\cdot d$ (*m* und *n* sind natürliche Zahlen von 0 bis 10 und $m \neq n$). Da die zwei Zahlen bei Division durch 11 denselben Rest ergeben, ist ihre Differenz teilbar durch 11, also $11\left|\left(a+m\cdot d-a-n\cdot d\right)\right.$, oder $11\left|\left(m-n\right)\cdot d\right.$. Weil 11 eine Primzahl ist, kann sie das Produkt $\left(m-n\right)\cdot d$ nur so teilen, dass sie einen Faktor teilt. 11 muss also Teiler von $m-n$ oder Teiler von *d* sein. (**)

<u>7. Feststellung</u>: $m-n$ ist <u>nicht</u> teilbar durch 11 (wegen $0<m-n\leq 10$).

<u>8. Feststellung</u>: *d* ist nicht teilbar durch 11, denn $0<d\leq 10$. Begründung: Für $d > 10$ wäre $a + 10d > 1 + 10\cdot 10 = 101$, was jedoch nicht geht, denn die größte Zahl ist 100.

Aus der 7. und 8. Feststellung folgt, dass die notwendige Bedingung (**) nicht erfüllt werden kann. Damit ist bewiesen, dass 11 <u>keine</u> Lösung darstellt.

<u>Beachte</u>: Da 11 <u>keine</u> Lösung ist, stellt 12 ebenfalls <u>keine</u> Lösung dar.

(A) 37% **(B) 63%** **(C) 16%** **(D)** 16% **(E)** 16%