„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2016

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

Klasse 12

8. Es sei $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2015}$ eine beliebige Aufzählung der Zahlen 1, 2, 3, …, 2015. Das Produkt $(a_1-1)\cdot(a_2-2)\cdot(a_3-3)\cdot...\cdot(a_{2015}-2015)$

(A) *kann gerade sein.* **(B)** *kann ungerade sein.* **(C)** *ist gerade.*
(D) *ist ungerade.* **(E)** *kann negativ sein.*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass (C) stimmt, das Produkt ist also eine gerade Zahl.
<u>1. Feststellung</u>: Von den 2015 Zahlen sind 1008 ungerade und 1007 gerade.
<u>2. Feststellung</u>: Nur ein Produkt von lauter ungeraden Zahlen ist ungerade.
<u>3. Feststellung</u>: Im Produkt $(a_1-1)\cdot(a_2-2)\cdot(a_3-3)\cdot...\cdot(a_{2015}-2015)$ wären genau dann alle Produkte (als Klammern) ungerade, wenn bei den Termen a_1-1, a_3-3, a_5-5, …, $a_{2015}-2015$ die Zahlen $a_1, a_3, ..., a_{2015}$ gerade, und bei den Termen a_2-2, a_4-4, …, $a_{2014}-2014$ die Zahlen a_2, a_4, …, a_{2014} ungerade wären. Es ergäben sich 1008 gerade Zahlen ($a_1, a_3, ..., a_{2015}$) und 1007 ungerade Zahlen (a_2, a_4, …, a_{2014}). Dies geht aber wegen der 1. Feststellung <u>nicht</u> (es ist nämlich genau umgekehrt). Damit ist bewiesen, dass das Produkt eine gerade Zahl ist.
Alternativlösung zu Teil 1: Im Produkt ist die Summe aller Faktoren 0. Andererseits müsste jeder Faktor eine ungerade Zahl sein (2. Feststellung). Das Produkt besteht aus 2015 Faktoren – eine ungerade Zahl. Die Summe einer ungeraden Anzahl von ungeraden Zahlen ist aber ungerade – 0 jedoch ist eine gerade Zahl ($0 = 2\cdot 0$).
Bis jetzt haben wir gezeigt, dass (A), (C) richtig und (B), (D) <u>falsch</u> sind.
<u>Beachte</u>: Aus „Das Produkt *ist* gerade” folgt „Das Produkt *kann* gerade sein” mag komisch klingen, ist aber trotzdem richtig (umgekehrt wäre es ungewiss).
In **Teil 2** zeigen wir, dass (E) richtig ist. Dazu geben wir folgendes <u>Beispiel</u> an:
$a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=4$, …, $a_{2014}=2015$ und $a_{2015}=1$. Das Produkt wird zu $(2-1)\cdot(3-2)\cdot...\cdot(2014-2013)\cdot(1-2015) = 1\cdot1\cdot1\cdot...\cdot1\cdot(-2014)=-2014$.

(A) 40% **(B)** 27% **(C) 51%** **(D)** 11% **(E) 71%**