

„Blick ins Buch“ Bolyai Teamwettbewerb 2017

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

Klasse 6

2. In einer Konditorei gab es Torten für 12 € und für 16 €. Sophie und Lara kauften mehrere Torten für eine Party und bezahlten genau 96 €. Wie viele Torten konnten sie insgesamt gekauft haben?
- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Lösung: Wir untersuchen, wie viele Torten die Mädchen kaufen konnten, die 16 € kosteten. Wir arbeiten mit systematischem Probieren.

1. Fall: Sie hätten keine einzige Torte für 16 € gekauft. Von der anderen Torte für 12 € müssten sie dann $96:12=8$ Stück gekauft haben. Dieser Fall ist also möglich und sie hätten insgesamt **8** Torten gekauft.

2. Fall: Sie hätten eine einzige Torte für 16 € gekauft. Für die andere Torte zu 12 € hätten sie dann noch $96-16=80$ € übrig gehabt. 80 ist aber durch 12 nicht teilbar. Dieser Fall ist daher nicht möglich.

3. Fall: Sie hätten 2 Torten zu je 16 € gekauft. Für die andere Torte zu 12 € hätten sie dann noch $96-2\cdot 16=96-32=64$ € übrig gehabt. 64 ist aber durch 12 nicht teilbar. Dieser Fall ist daher nicht möglich.

4. Fall: Sie hätten 3 Torten zu je 16 € gekauft. Für die andere Torte zu 12 € hätten sie dann noch $96-3\cdot 16=96-48=48$ € übrig gehabt und $48:12=4$. Dieser Fall ist also möglich und sie hätten insgesamt **7** Torten gekauft (3 + 4).

5. Fall: Sie hätten 4 Torten zu je 16 € gekauft. Für die andere Torte zu 12 € hätten sie dann noch $96-4\cdot 16=96-64=32$ € übrig gehabt. 32 ist aber durch 12 nicht teilbar. Dieser Fall ist daher nicht möglich.

6. Fall: Sie hätten 5 Torten zu je 16 € gekauft. Für die andere Torte zu 12 € hätten sie dann noch $96-5\cdot 16=96-80=16$ € übrig gehabt. 16 ist aber durch 12 nicht teilbar. Dieser Fall ist daher nicht möglich.

7. Fall: Sie hätten 6 Torten zu je 16 € gekauft. $96:16=6$, die Rechnung geht auf. Für die andere Torte zu 12 € hätten sie kein Geld mehr übrig gehabt. Dieser Fall ist also möglich und sie hätten insgesamt **6** Torten gekauft.

Beachte: 7 Torten oder mehr zu 16 € sind nicht möglich, denn schon 7 Torten hätten $7\cdot 16\text{ €}=112\text{ €}$ gekostet – mehr als die 96 €. Dies geht nicht.

Aus der Untersuchung geht hervor: Sie konnten **6**, **7** oder **8** Torten gekauft haben.

Wir haben durch systematisches Probieren *alle* möglichen Fälle untersucht. Damit folgt aus dem Gedankengang auch, dass 5 und 9 keine Lösungen sind.

Bemerkung: 3 Torten zu 16 € kosten genauso viel wie 4 Torten zu 12 €, denn

$3 \cdot 16 = 48 = 4 \cdot 12$. Betrachten wir nun die 6 Torten zu 16 € aus dem 7. Fall. Wenn wir 3 davon durch 4 Torten zu 12 € ersetzen, erhalten wir den 4. Fall.

(A) 2% (B) 70% (C) 40% (D) 87% (E) 0%

4. Peter bekommt in der Schule jede Woche drei Noten in den Fächern Englisch, Mathematik und Deutsch. Er bekommt jede Woche nur ganze Noten, und zwar 1, 2, 3 oder 4. Seine Eltern loben ihn, wenn er sich durch diese Noten in mehr Fächern verbessert als verschlechtert hat. In höchstens wie vielen aufeinanderfolgenden Wochen können die Eltern Peter gelobt haben?

Hinweis: Die Frage beschränkt sich auf die unten aufgeführten Zahlen.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung: In **Teil 1** formulieren wir eine Feststellung und nehmen drei konkrete Noten an.

1. Feststellung: Peter wird gelobt, wenn er sich im Vergleich zur Vorwoche in mindestens zwei Fächern verbessert hat.

Annahme: Wir nehmen an, dass Peter in der ersten Woche eine 2 in Englisch, eine 3 in Mathe und eine 4 in Deutsch bekam.

In **Teil 2** untersuchen wir die zweite und die dritte Woche.

Im *1. Schritt* betrachten wir die *zweite* Woche. Wenn in Mathe aus der 3 eine 2, in Deutsch aus der 4 eine 3 und in Englisch aus der 2 eine 4 wird, hat sich Peter in zwei Fächern verbessert.

Im *2. Schritt* betrachten wir die *dritte* Woche. Wenn jetzt in Deutsch aus der 3 eine 2, in Englisch aus der 4 eine 3 und im Mathe aus der 2 eine 4 wird, hat sich Peter wieder in zwei Fächern verbessert.

Dies bedeutet: Peter hat sich in 2 aufeinanderfolgenden Wochen in je zwei Fächern verbessert (siehe noch 1. Feststellung).

In **Teil 3** untersuchen wir die zweite, die dritte und die vierte Woche. Die zweite und die dritte Woche verlaufen wie in Teil 2. Wenn in der vierten Woche in Englisch aus der 3 eine 2, in Mathe aus der 4 eine 3 und in Deutsch aus der 2 eine 4 wird, hat sich Peter wieder in zwei Fächern verbessert.

2. Feststellung: Jetzt, nach 3 aufeinanderfolgenden Wochen, in denen Peter gelobt wurde, hat er genau wieder die Noten aus der ersten Woche erreicht: eine 2 in Englisch, eine 3 in Mathe und eine 4 in Deutsch.

3. Feststellung: Bei dieser Notenentwicklung hat Peter in jeder Woche eine 2, eine 3 und eine 4 – nur die zugehörigen Fächer ändern sich.

In **Teil 4** untersuchen wir die fünfte, die sechste und die siebte Woche. Peters Noten sind jetzt, nach der vierten Woche, genau wie in der ersten Woche (siehe 2. Feststellung). Geht die Notenentwicklung wie in Teil 3 weiter, verbessert sich Peter 4 Mal, 5 Mal und 6 Mal in Folge in zwei Fächern.

Bemerkung: „Wie kann es sein, dass Peter sich Woche für Woche verbessert, obwohl er stets die gleichen Noten hat?“ Die Antwort auf diese berechnete Frage lautet: Er verbessert sich zwar in *zwei* Fächern um je *eine* Note, verschlechtert sich dafür aber in *einem* Fach um gleich *zwei* Noten. Daher

kann eigentlich von keiner Verbesserung die Rede sein, denn $+1 + 1 - 2 = 0$. Peter tritt also auf der Stelle was seinen Notendurchschnitt in diesen drei Fächern betrifft.

In der Aufgabe fragte man nach der *höchsten* Anzahl von Wochen. Sie ist die *größte* aufgeführte Zahl, nämlich die **6**.

- (A) 17% (B) 42% (C) 33% (D) 12% (E) 27%