„Blick ins Buch"
Bolyai Teamwettbewerb 2018

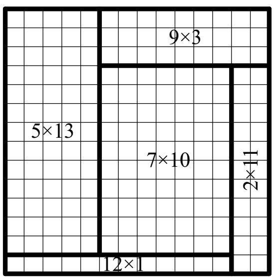
Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

10. Klasse / 10. Schulstufe

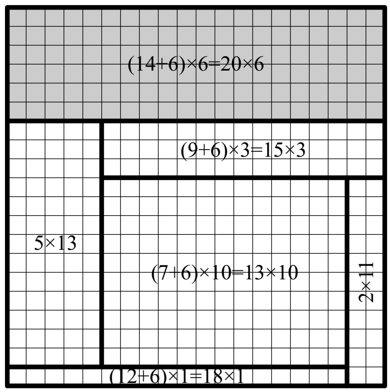
6. Julian zerlegt ein Quadrat in Rechtecke. Anschließend schreibt er die Längen und die Breiten aller dieser Rechtecke (in cm) auf. Er stellt fest: Alle Zahlen sind unterschiedlich. **Die Frage:** In insgesamt wie viele Rechtecke kann Julian das Quadrat zerlegt haben?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **5** und **6** Lösungen darstellen. Dazu geben wir jeweils ein Beispiel an. *Figur 1* zeigt eine Zerlegung in 5 Rechtecke, *Figur 2* eine Zerlegung in 6 Rechtecke. Die Längen und die Breiten wurden in jedes Rechteck geschrieben. Alle Zahlen sind unterschiedlich.



Figur 1



Figur 2

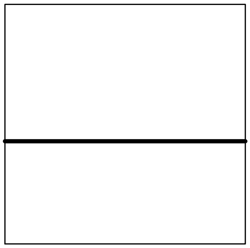
<u>Bemerkung</u>: *Figur 2* ist aus *Figur 1* entstanden, indem wir diese durch das schraffierte Rechteck ergänzt haben. Da so die Breite um 6 erhöht wurde, mussten wir auch die Länge um 6 cm erhöhen (damit es ein Quadrat bleibt).

In beiden Figuren sind alle Schnitte parallell zu einer Seite des Quadrates. Dies ist kein Zufall, sondern es gilt allgemein:

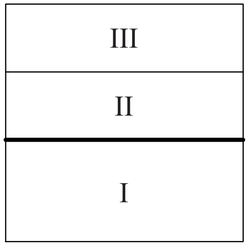
<u>Feststellung</u>: Jeder Schnitt verläuft parallel zu einer Seite des Quadrates (denn nur so können wir lauter Rechtecke erhalten).

Im Folgenden setzen wir diese Feststellung stets voraus.

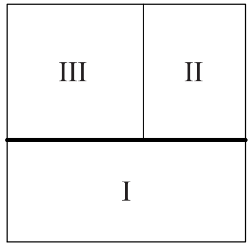
In **Teil 2** zeigen wir, dass 2 <u>keine</u> Lösung darstellt. Begründung: Die fett gezeichnete Linie in *Figur 3* ist eine gemeinsame Seite der zwei Rechtecke. Deren Länge schreibt Julian zweimal auf: Einmal für das eine, einmal für das andere Rechteck. Dies geht aber <u>nicht</u>, da alle Zahlen unterschiedlich sein müssen.



Figur 3



Figur 4



Figur 5

In **Teil 3** zeigen wir, dass 3 keine Lösung darstellt. Denn: Ein Quadrat kann auf zwei Arten in 3 Rechtecke zerlegt werden (siehe *Figur 4* und *Figur 5*). In beiden Fällen gibt es aber (mindestens) eine gemeinsame Seite (in *Figur 4* z. B. die fett gezeichnete Linie, in *Figur 5* die senkrechte Linie in der Mitte). Dies geht aber nicht, da alle Zahlen unterschiedlich sein müssen.
In **Teil 4** zeigen wir, dass 4 keine Lösung darstellt. Begründung: Zunächst zerlegen wir das Quadrat in zwei Rechtecke (siehe noch einmal *Figur 3*). Um insgesamt 4 Rechtecke zu erhalten, haben wir nun zwei Möglichkeiten:
1. Fall: Wir zerlegen jedes der Rechtecke in zwei Rechtecke.
2. Fall: Wir zerlegen eines der Rechtecke in drei Rechtecke.
Der 1. Fall liefert keine Lösung. Dies wurde in Teil 2 begründet.
Der 2. Fall liefert ebenfalls keine Lösung. Dies wurde in Teil 3 begründet.

(A) 9% **(B)** 21% **(C)** 23% **(D) 40%** **(E) 25%**

Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. „Das Produkt dreier natürlicher Zahlen ist 36.“ sagt Peter und fragt Bea: „Um welche Zahlen handelt es sich?“ Bea überlegt kurz und antwortet: „Das sind zu wenig Angaben.“ Daraufhin teilt Peter Bea auch die Summe der drei Zahlen mit. Bea erwidert: „Die Angaben reichen immer noch nicht aus, um die Frage beantworten zu können.“ **Die Frage:** Welche Summe hat Peter Bea mitgeteilt? Begründet eure Antwort!
Bemerkung: Die drei natürlichen Zahlen müssen nicht unterschiedlich sein.

Lösung: Peter sagte Bea, dass die Summe der drei Zahlen 13 ist (2 Punkte). Begründung: 36 kann man auf acht Arten als Produkt dreier natürlicher Zahlen darstellen: $1 \cdot 1 \cdot 36$, $1 \cdot 2 \cdot 18$, $1 \cdot 3 \cdot 12$, $1 \cdot 4 \cdot 9$, $1 \cdot 6 \cdot 6$, $2 \cdot 2 \cdot 9$, $2 \cdot 3 \cdot 6$, $3 \cdot 3 \cdot 4$ (für jedes Produkt 1 Punkt). Daher kann Bea nicht sofort wissen, welche Zahlen Peter meint. Die Summe der drei Zahlen in den obigen Produkten ist, der Reihe nach, 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, 10 (2 Punkte). 13 ist die einzige Summe, die zweimal vorkommt (2 Punkte). Deswegen kann Bea nicht wissen, ob die drei Zahlen 1, 6, 6 oder 2, 2, 9 sind (2 Punkte). Alle anderen Summen kommen bei nur genau einem Produkt vor. Daher musste Peter als Summe 13 gesagt haben. (Insgesamt maximal 16 Punkte.).