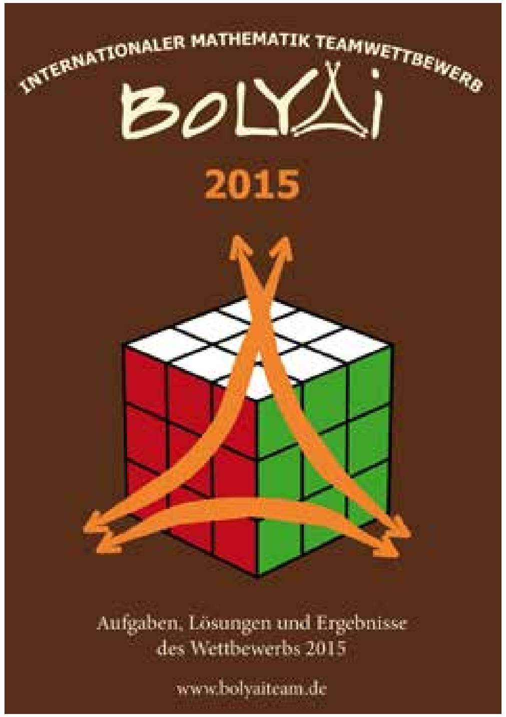
Löst die folgende Aufgabe an der angegebenen Stelle des Antwortblattes!

14. Wir legen vier gleiche Schlüssel in ein 4×4 Fächerregal, so dass sich in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen jeweils genau ein Schlüssel befindet. Wie viele verschiedene Lösungen gibt es? Zeichnet alle Lösungen! <u>Lösungshinweis:</u> Markiert die 4 Felder mit je einem X.



Die Aufgaben, deren Lösungen und die Ergebnisse des Wettbewerbs vom Schuljahr 2014/2015 sind als Buch erschienen. Alle Lösungen wurden schülerfreundlich und ausführlich gestaltet. Das Buch kann unter <u>www.bolyaiteam.de</u> bestellt werden.

„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen."

Prof. Dr. Thomas Freund

Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie, Förderer des Wettbewerbs

BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®

C. F. GAUSS

2016

1. RUNDE

KLASSE 12

J. BOLYAI

Förderer des Wettbewerbs:
PROF. DR. THOMAS FREUND
Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie

Begründer des Wettbewerbs und Ersteller der Aufgaben:
NAGY-BALÓ ANDRÁS, *Mathematiklehrer*

Übersetzer der Aufgaben:
ATTILA FURDEK, *Mathematiklehrer*
WEISZ ÁGOSTON, *Mathematikstudent*

Lektoren der Übersetzung:
MATTHIAS BENKESER, *Mathematiklehrer*
MICHAEL KNOTE, *Mathematiklehrer*

Koordinatorin:
RITA FESER, *Mathematiklehrerin*

Betreiber der Homepage und des informatischen Systems:
GEORG PROBST, *Informatiker*
TASSY GERGELY, *Mathematiklehrer*

www.bolyaiteam.de

Bolyai Team®	Klasse 12	29. Februar 2016

Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-13 auf dem Antwortblatt mit X. Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.

1. Gegeben ist ein Würfel. Wie viele verschiedene Geraden gibt es insgesamt, so dass jede von ihnen durch genau 2 Eckpunkte des Würfels geht?

(A) *12* **(B)** *22* **(C)** *28* **(D)** *32* **(E)** *56*

2. Wie viele natürliche Zahlen x erfüllen die Ungleichungen $3^{2015} \le x \le 3^{2016}$?

(A) 2015 **(B)** 3^{2015} **(C)** $3^{2015}+1$ **(D)** $2\cdot 3^{2015}$ **(E)** $2\cdot 3^{2015}+1$

3. In einen Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r wird ein regelmäßiges Hunderteck mit den Eckpunkten $A_1,\ A_2,\ A_3,\ ...,\ A_{100}$ einbeschrieben. Der Punkt M liegt außerhalb der Ebene des Hundertecks und es gilt $OM = r$. Wie viel Grad kann die Winkelweite des Winkels $\sphericalangle A_{12}MA_{62}$ betragen?

(A) *15°* **(B)** *30°* **(C)** *60°* **(D)** *90°* **(E)** *120°*

4. Aus 100 ganzen Zahlen kann man stets eine (oder mehrere) so auswählen, dass sie (oder deren Summe) teilbar ist durch

(A) *96* **(B)** *98* **(C)** *100* **(D)** *103* **(E)** *111*

5. Wie viele Lösungen kann die Gleichung $\left|\left|\left|2x-1\right|-2\right|-1\right| = p$ insgesamt haben?
<u>Lösungshinweis:</u> $x \in \mathbb{R}$ ist die Variable, $p \in \mathbb{R}$ ist ein Parameter.

(A) *0* **(B)** *2* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *8*

6. Insgesamt wie viele reelle Zahlen erfüllen die Gleichung $3^x+4^x+5^x=6^x$?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

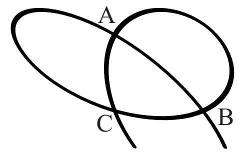
7. Wie viel beträgt die Summe $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 17}+...+\frac{1}{2013\cdot 2017}$?

(A) *weniger als 1* **(B)** $\frac{504}{2017}$ **(C)** $\frac{2013}{2017}$ **(D)** $\frac{2016}{2017}$ **(E)** *mehr als 1*

8. Es sei $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2015}$ eine beliebige Aufzählung der Zahlen 1, 2, 3, …, 2015. Das Produkt $(a_1-1)\cdot(a_2-2)\cdot(a_3-3)\cdot...\cdot(a_{2015}-2015)$

(A) *kann gerade sein.* **(B)** *kann ungerade sein.* **(C)** *ist gerade.*
(D) *ist ungerade.* **(E)** *kann negativ sein.*

9. Eine Schnur liegt auf dem Boden. Sie überschneidet sich in den Punkten A, B und C (siehe Abbildung). Sie liegt aber so weit weg von uns, dass wir nicht erkennen können, wie sie sich in den Punkten A, B und C überschneidet (d.h. welches Stück oberhalb bzw. unterhalb verläuft). Wir wissen aber: An allen drei Stellen A, B und C liegt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit entweder die eine oder die andere Seite oberhalb. Jemand zieht die Schnur an ihren zwei Enden auseinander.



Die Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Knoten entsteht?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** *mehr als* $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** *mehr als* $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

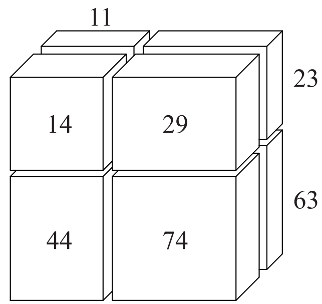
10. Alle Felder eines 8×8 Schachbrettes wurden so gefärbt, dass sich in jeder Zeile und jeder Spalte höchstens 4 verschiedene Farben befinden. Insgesamt wie viele verschiedene Farben konnten dazu verwendet werden?

(A) *24* **(B)** *25* **(C)** *26* **(D)** *27* **(E)** *28*

11. Wir konstruieren Quadrate auf alle Seiten eines Parallelogramms (nach außen). Die Mittelpunkte der Quadrate seien *A, B, C, D*. Entscheide, welche der folgenden Aussagen richtig sind. Das Viereck *ABCD*

(A) *kann ein Parallelogramm sein.* **(B)** *ist ein Parallelogramm.*
(C) *kann eine Raute sein.* **(D)** *kann ein Quadrat sein.*
(E) *ist ein Quadrat.*

12. Mit drei geraden Schnitten wird ein Quader in acht kleinere Quader zerlegt. In der Abbildung sind die Oberflächen von 7 kleinen Quadern (in cm^2) angegeben. Wie viele cm^2 kann die Oberfläche des achten Quaders betragen?



(A) *24* **(B)** *32* **(C)** *36*
(D) *46* **(E)** *48*

13. Wie viele positive ganze Zahlen n gibt es insgesamt, für die $n^2+5n+14$ eine Quadratzahl ist?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *unendlich viele*

Achtung! Aufgabe 14 folgt auf der nächsten Seite.