„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2015

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

Klasse 8

4. Jemand addierte einige aufeinanderfolgende ganze Zahlen und erhielt als Ergebnis 13. Wie viele ganze Zahlen konnte er auf diese Weise addieren?

(A) *2* **(B)** *9* **(C)** *13* **(D)** *26* **(E)** *30*

Lösung: Im *1. Schritt* zeigen wir, dass die Antworten (A), (C), (D) möglich sind.
Beispiel für *zwei* aufeinanderfolgende Zahlen: $6+7=13$.
Beispiel für *13* aufeinanderfolgende Zahlen:

$$(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6+7=13.$$

Beispiel für *26* aufeinanderfolgende Zahlen:
$(-12) + (-11) + (-10) + (-9) + (-8) + (-7) + (-6) + (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 +1 +2 +3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 13$.
Im *2. Schritt* zeigen wir, dass (B) und (E) nicht möglich sind. Es kann also nicht sein, dass wir 9 oder 30 Zahlen addiert haben. Dazu stellen wir zuerst einen Hilfssatz auf.
Hilfssatz: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist stets teilbar durch 3. Tatsächlich: Drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen haben die Form n, n + 1, n + 2. Wir addieren die drei Zahlen: $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$ und die Summe ist teilbar durch 3, denn $3n + 3 = 3\cdot(n + 1)$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.
Wir zeigen, dass (B) nicht möglich ist. Betrachten wir dazu die Summe von 9 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Wir können daraus drei Dreiergruppen bilden. Laut Hilfssatz ist jede Teilsumme der Dreiergruppen durch 3 teilbar. Damit ist aber die Gesamtsumme auch durch 3 teilbar. Sie kann daher nicht 13 betragen, denn 13 ist nicht durch 3 teilbar.
Wir zeigen, dass (E) nicht möglich ist. Betrachten wir nun die Summe von 30 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Wir können daraus zehn Dreiergruppen bilden. Laut Hilfssatz ist jede Teilsumme der Dreiergruppen durch 3 teilbar. Damit ist aber die Gesamtsumme auch durch 3 teilbar. Sie kann daher nicht 13 betragen, denn 13 ist nicht durch 3 teilbar.

(A) 89% **(B)** 21% **(C) 50%** **(D) 20%** **(E)** 6%

12. Der Prinz hatte den Drachen in die Ecke gedrängt. Dieser versuchte, seine Haut zu retten und machte daher dem Prinzen folgendes Angebot: „Nimm meine Schatzkiste und stecke eine oder mehrere Goldbarren wie du willst in deinen Sack. Nachher nehme ich eine oder mehrere zurück, aber eine andere Anzahl als deine. Dies werden wir so weitermachen: Du nimmst eine oder mehrere Goldbarren aus meiner Kiste und ich aus deinem Sack zurück. Wir dürfen aber nie eine Anzahl nehmen, die wir früher schon mal hatten. Wenn diese Regel dann irgendwann dazu führt, dass kein Nehmen mehr möglich ist, kannst du alle Goldbarren behalten, die sich zu diesem Zeitpunkt in deinem Sack befinden.“ Der Prinz ging auf das Angebot ein.

Die Frage: Mit höchstens wie vielen Goldbarren konnte der Prinz am Ende gehen, wenn ursprünglich 18 Goldbarren in der Kiste waren?

Lösungshinweis: Der Drache ist schlau und versucht alles, damit der Prinz möglichst wenig bekommt.

(A) *9* **(B)** *16* **(C)** *17* **(D)** *18* **(E)** *Keine von diesen.*

Lösung: Wir zeigen im **ersten Teil**, dass der Prinz am Ende 17 Goldbarren erhalten kann. Der rote Faden der Lösung besteht darin, dass dem Drachen bei jedem Schritt nur eine einzige Möglichkeit bleibt. Der Prinz baut dabei auf diese Regel: *Beide dürfen nie eine Anzahl nehmen, die sie früher schon mal hatten*.

Im 1. Schritt nahm der Prinz 2 Goldbarren. Im 2. Schritt hatte der Drache keine andere Wahl, als 1 Goldbarren zurückzunehmen. Beim Prinzen blieb 1.

Im 3. Schritt nahm der Prinz 3 Goldbarren und hatte jetzt 4. Im 4. Schritt hatte der Drache keine andere Wahl, als 4 Goldbarren zurückzunehmen. Beim Prinzen blieben keine. Dies ist wie am Anfang, jedoch mit dem Unterschied, dass beim Nehmen die Zahlen 1, 2, 3, 4 nicht mehr verwendet werden dürfen.

Im 5. Schritt nahm der Prinz 6 Goldbarren und hatte jetzt 6. Im 6. Schritt hatte der Drache keine andere Wahl, als 5 Goldbarren zurückzunehmen. Beim Prinzen blieb 1 Stück. Im 7. Schritt nahm der Prinz 7 Goldbarren und hatte jetzt 8. Im 8. Schritt hatte der Drache keine andere Wahl, als 8 Goldbarren zurückzunehmen. Beim Prinzen blieben keine. Dies ist wie am Anfang, jedoch mit dem Unterschied, dass beim Nehmen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 nicht mehr verwendet werden dürfen.

Im 9. Schritt nahm der Prinz 10 Goldbarren und hatte jetzt 10. Im 10. Schritt hatte der Drache keine andere Wahl, als 9 Goldbarren zurückzunehmen. Beim Prinzen blieb 1 Stück. Im 11. Schritt nahm der Prinz 11 Goldbarren und hatte jetzt 12. Im 12. Schritt hatte der Drache keine andere Wahl, als 12 Goldbarren zurückzunehmen. Beim Prinzen blieben keine. Dies ist wie am Anfang, jedoch mit dem Unterschied, dass beim Nehmen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 nicht mehr verwendet werden dürfen.

Im 13. Schritt nahm der Prinz 14 Goldbarren und hatte jetzt 14. Im 14. Schritt hatte der Drache keine andere Wahl, als 13 Goldbarren zurückzunehmen. Beim Prinzen blieb 1 Stück. Im 15. Schritt nahm der Prinz 15 Goldbarren und hatte jetzt 16. Im 16. Schritt hatte der Drache keine andere Wahl, als 16 Goldbarren zurückzunehmen. Beim Prinzen blieben keine. Dies ist wie am Anfang, jedoch mit dem Unterschied, dass beim Nehmen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 nicht mehr verwendet werden dürfen. Im 17.

Schritt nahm der Prinz 17 Goldbarren und hatte jetzt 17. Dies war aber auch der letzte Schritt. Begründung: Alle Zahlen von 1 bis 17 wurden bereits verwendet. Daher war kein Nehmen mehr möglich, der Prinz bekam also 17 Goldbarren.

Bemerkung: Um eine Regelmäßigkeit zu entdecken, gruppieren wir die Schritte in Viererschritte: Schritte 1-4, Schritte 5-8, Schritte 9-12, Schritte 13-16. Die Schritte 1-4 kann man – der Reihe nach – durch die Anzahl der genommenen Goldbarren, also durch 2, 1, 3, 4 beschreiben. Addieren wir zu diesen Zahlen je 4, erhalten wir 6, 5, 7, 8. Die Schritte 5-8 kann man – der Reihe nach – durch die Anzahl der genommenen Goldbarren, also durch 6, 5, 7, 8 beschreiben. Diese Regel geht nun genauso weiter. Anschaulich:

Schritte 1-4 Schritte 5-8 Schritte 9-12 Schritte 13-16

$2, 1, 3, 4 \xrightarrow{\text{je 4 mehr}} 6, 5, 7, 8 \xrightarrow{\text{je 4 mehr}} 10, 9, 11, 12 \xrightarrow{\text{je 4 mehr}} 14, 13, 15, 16$

Mit Hilfe dieser Regelmäßigkeit hätten wir den ganzen Ablauf etwas kürzer schildern können.

Im **zweiten Teil** müssen wir noch zeigen, dass 17 die höchstmögliche Anzahl darstellt, also dass der Prinz nicht alle 18 Goldbarren erhalten kann.

Nehmen wir für einen Augenblick an, dass der Prinz doch alle 18 Goldbarren bekommen hätte. Dies bedeutet: Beim Prinzen wären alle 18 Goldbarren *und* kein Nehmen wäre mehr möglich. Das hieße, alle Zahlen von 1 bis 18 wären schon verwendet worden. Daraus folgte: Es wären genau 18 Schritte gewesen. Der Prinz finge an. Er machte die Schritte 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 und 17, der Drache die Schritte 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 und 18. Dies bedeutete: Beim 18-ten und letzten Schritt wäre der Drache am Zug gewesen (und nicht der Prinz, wie es hätte sein müssen!). Er nähme dabei einige Goldbarren vom Prinzen zurück. Dem Prinzen blieben also weniger als 18 Goldbarren. Damit haben wir gezeigt: Der Prinz kann nicht alle 18 Goldbarren erhalten.

(A) 53% **(B)** 7% **(C) 13%** **(D)** 9% **(E)** 23%