„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2015

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

Klasse 10

2. Eine Firma möchte von einer bestimmten Schokoladenart mehr verkaufen. Zu diesem Zweck enthält jede Tafel Schokolade eine silberne Sondermarke. Für zehn Sondermarken bekommt man eine Tafel Schokolade umsonst.
Die Frage: Welchem Anteil an einer Schokoladentafel entspricht der Wert einer Sondermarke?

(A) *mindestens* $\frac{1}{10}$ **(B)** *0,11111111111111111…* **(C)** $\frac{1}{10}$

(D) $\frac{1}{9}$ **(E)** $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$

Lösung: Max geht mit nur neun Sondermarken ins Geschäft und bittet um eine Tafel Schokolade. Auf den Einwand “Es fehlt doch eine Sondermarke“ erwidert er: “Es scheint zwar so zu sein, ist aber nicht so. Denn die Tafel Schokolade, die ich bekomme, enthält eine weitere Sondermarke. Sie können diese Sondermarke aus der Packung nehmen. Damit haben Sie die zehn Sondermarken und ich kann endlich meine Schokolade bekommen.“ Der Verkäufer ist mit diesem Vorschlag einverstanden. Max überlegt sich mit der Schokolade in dem Mund: “Mal nachdenken. Ich bin mit *neun Sondermarken* gekommen und dafür habe ich letztendlich *genau eine Schokolade* bekommen. Dies bedeutet: Eine Sondermarke ist $\frac{1}{9}$ Schokolade Wert.

Alternativlösung: Wir betrachten eine nicht angebrochene Packung Schokolade. Gesamtwert = 1 Schokolade + 1 Sondermarke.
Zehn Sondermarken sind eine Packung Wert. Daraus folgt:

1 Sondermarke = $\frac{1}{10}$ Packung. Dies bedeutet:

Gesamtwert = 1 Schokolade + $\frac{1}{10}$ Packung

Gesamtwert = 1 Schokolade + $\frac{1}{10}\cdot(1 \text{ Schokolade} + 1 \text{ Sondermarke})$

Gesamtwert = 1 Schokolade + $\frac{1}{10}$ Schokolade + $\frac{1}{10}$ Sondermarke

$$\text{Gesamtwert} = 1 \text{ Schokolade} + \frac{1}{10} \text{ Schokolade} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \text{ Packung}$$

$$\text{Gesamtwert} = 1 \text{ Schokolade} + \frac{1}{10} \text{Schokolade} + \frac{1}{100} \text{Packung}$$

Dieser Gedankengang lässt sich beliebig weiterführen. Dies bedeutet:

$$\text{Gesamtwert} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$$

Schreiben wir $\frac{1}{10} = 0{,}1$; $\frac{1}{100} = 0{,}01$; $\frac{1}{1000} = 0{,}001$ usw. so erhalten wir:

Gesamtwert = 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + 0,00001 + ... = 1,11111...

Eine Packung besteht aus einer Schokolade und aus einer Sondermarke. Die Sondermarke ist also 1,11111... – 1 = **0,111111…** Schokolade Wert.

<u>Beachte:</u> 0,11111... = $0,\overline{1} = \frac{1}{9}$. Probe: 1: 9 = 0,111111… und es stimmt.

(A) 47% **(B) 39%** **(C)** 55% **(D) 16%** **(E)** 16%

13. Unsere Aufgabe ist es, in mehreren Schritten von 1 bis 2014 zu gelangen. Im ersten Schritt fangen wir mit der Zahl 1 an und addieren 3 dazu oder multiplizieren sie mit 4. Mit dem Ergebnis verfahren wir im nächsten Schritt genauso: Entweder addieren wir 3 dazu oder multiplizieren es mit 4. Wir setzen dieses Verfahren fort.

Die Frage: In wie vielen Schritten können wir das Ziel 2014 erreichen?

(A) *9* **(B)** *10* **(C)** *11* **(D)** *12* **(E)** *14*

Lösung: In **Teil 1** formulieren wir die Aufgabe durch „rückwärts Denken“ neu. Wir starten bei 2014 und möchten bei 1 ankommen. Bei jedem Schritt können wir entweder 3 subtrahieren (statt addieren) oder durch 4 dividieren (statt multiplizieren).

<u>Beachte</u>: Die Zwischenergebnisse müssen stets ganze Zahlen sein. Durch 4 dürfen wir also nur solche Zahlen dividieren, die durch 4 teilbar sind.

In **Teil 2** zeigen wir, dass die Aufgabe in **11** Schritten lösbar ist. Zuerst arbeiten wir durch „rückwärts Denken“. Bei der nächsten Darstellung steht „$\rightarrow$“ für „minus 3“ und „$\Rightarrow$“ für „geteilt durch 4“.

$2014 \rightarrow 2011 \rightarrow 2008 \Rightarrow 502 \rightarrow 499 \rightarrow 496 \Rightarrow 124 \Rightarrow 31 \rightarrow 28 \Rightarrow 7 \rightarrow 4 \Rightarrow 1$ **(*)**

Die ursprüngliche Aufgabe kann man daher in **11** Schritten lösen. Bei der nächsten Darstellung steht „$\rightarrow$“ für „plus 3“ und „$\Rightarrow$“ für „mal 4“.

$1 \Rightarrow 4 \rightarrow 7 \Rightarrow 28 \rightarrow 31 \Rightarrow 124 \Rightarrow 496 \rightarrow 499 \rightarrow 502 \Rightarrow 2008 \rightarrow 2011 \rightarrow 2014$

In **Teil 3** zeigen wir, dass die Aufgabe in weniger als 11 Schritten <u>nicht</u> lösbar ist. Tatsächlich:

<u>1. Feststellung</u>: Wenn wir durch 4 teilen, kommen wir schneller voran, als wenn wir 3 subtrahieren.

<u>Beachte</u>: Die einzige Ausnahme ist $4 \Rightarrow 1$, denn $4 \rightarrow 1$ ist auch nur 1 Schritt. In diesem Sonderfall spielt es keine Rolle, ob wir durch 4 teilen oder 3 abziehen.

<u>2. Feststellung</u>: Am schnellsten erreichen wir das Ziel, wenn wir *jede*

durch 4 teilbare Zahl auch durch 4 dividieren (statt 3 zu subtrahieren).
3. Feststellung: Bei der Lösung in Teil 2 haben wir jede durch 4 teilbare Zahl tatsächlich durch 4 dividiert, siehe die Zeile **(*)**.
Aus den zweiten und dritten Feststellungen folgt, dass die Aufgabe in weniger als 11 Schritten nicht lösbar ist. Dies bedeutet: Mit 9 Schritten (A) oder 10 Schritten (B) ist die Aufgabe nicht lösbar.
In **Teil 4** zeigen wir, dass die Aufgabe in 12 Schritten nicht lösbar ist.
4. Feststellung: Wenn wir bei einer Zahl sind, die durch 4 nicht teilbar ist, müssen wir als nächsten Schritt 3 abziehen. Wenn wir bei einer Zahl sind, die durch 4 teilbar ist, können wir sie sowohl durch 4 teilen als auch 3 von ihr abziehen.
Behauptung: Wenn wir in einer Lösung an mindestens einer Stelle „geteilt durch 4“ durch „minus 3“ ersetzen, erhöht sich die Gesamtzahl der Schritte um mindestens 3.
Begründung *an einem Beispiel*: Statt $2008 \Rightarrow 502 \rightarrow 499$ (2 Schritte) erhalten wir $2008 \rightarrow 2005 \rightarrow 2002 \rightarrow 1999 \rightarrow 1996 \Rightarrow 499$ (5 Schritte).
Wir beweisen nun die Behauptung auch *allgemein*. Angenommen, wir sind bei der Zahl $4n$, mit $n > 3$, $n \in \mathbb{N}^*$. Wenn wir 3 abziehen, dann müssen wir dies 4mal nacheinander tun, bis wir wieder auf ein Vielfaches von 4 stoßen:
$4n \rightarrow 4n - 3 \rightarrow 4n - 6 \rightarrow 4n - 9 \rightarrow 4n - 12 \Rightarrow n - 3$
Hätten wir die Zahl $4n$ durch 4 geteilt, hätten wir nur 2 Schritte gebraucht:
$4n \Rightarrow n \rightarrow n - 3$. Die Differenz der Schritte beträgt somit $5 - 2 = 3$.
Anmerkung: Hätten wir bei $4n - 12$ statt geteilt durch 4 die 3 abgezogen, wäre die Anzahl der Schritte um noch mehr als 3 gestiegen. Daher „mindestens 3“.
Beachte: $n > 3$ stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar. Tatsächlich: Für $n = 1$ ist $4n = 4$, der bereits erwähnte Sonderfall. Für $n = 2$ ist $4n = 8$, für $n = 3$ ist $4n = 24$. Weder 8 noch 24 sind Teil einer Lösung, denn weder 8 noch 24 führen zu 1. Begründung an Beispielen: $8 \rightarrow 5 \rightarrow 2$ oder $24 \Rightarrow 3$ und es klappt so oder so nicht. Die vorletzte Zahl einer Lösung muss nämlich 4 sein.
Anregung: Der geneigte Leser möge die obige Begründung vervollständigen.
Die Behauptung ist damit bewiesen.
Wir betrachten nun irgendeine Lösung, die von 2014 ausgehend zu 1 führt und untersuchen zwei Fälle:
1. Fall: Bei allen durch 4 teilbaren Zahlen haben wir durch 4 geteilt. In diesem Fall bekommen wir die kürzeste Lösung mit 11 Schritten, siehe Teil 2.
2. Fall: Bei mindestens einer durch 4 teilbaren Zahl haben wir nicht durch 4 geteilt (aber *nicht* bei der Zahl 4). In diesem Falle ist laut Behauptung die Gesamtzahl der Schritte um mindestens 3 größer als 11, beträgt also mindestens 14. Da 14 größer als 12 ist, haben wir bewiesen, dass es keine Lösung gibt, die aus 12 Schritten besteht.
In **Teil 5** zeigen wir, dass die Aufgabe in **14** Schritten lösbar ist. Zuerst arbeiten wir wieder durch „rückwärts Denken“:
$2014 \rightarrow 2011 \rightarrow 2008 \rightarrow 2005 \rightarrow 2002 \rightarrow 1999 \rightarrow 1996 \Rightarrow 499 \rightarrow 496 \Rightarrow 124 \Rightarrow 31 \rightarrow 28 \Rightarrow 7 \rightarrow 4 \Rightarrow 1$
Die ursprüngliche Aufgabe kann man daher in **14** Schritten so lösen:

1→4→7 ⇒ 28→31 ⇒ 124 ⇒ 496→499 ⇒ 1996→1999→2002→2005→2008 →2011→2014

Die Untersuchung ergab, dass von den aufgeführten Zahlen nur **11** bzw. **14** Schritte zum Ziel führen.

(A) 8% **(B)** 14% **(C) 57%** **(D)** 18% **(E) 31%**