„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2016

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

Klasse 11

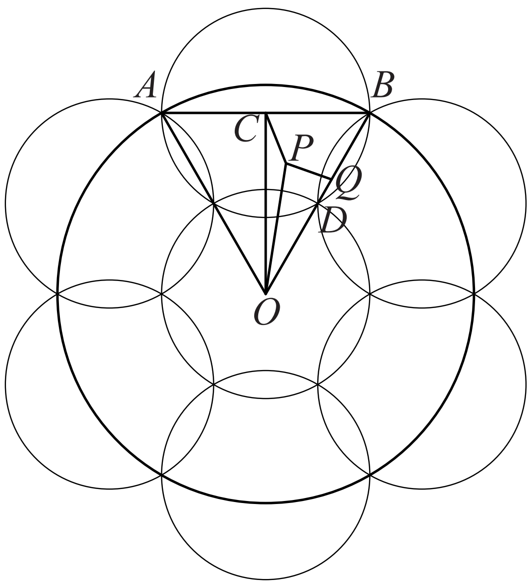
6. Mit wie vielen kleinen Kreisscheiben mit dem Radius 3 cm kann eine große Kreisscheibe mit dem Radius 6 cm vollständig überdeckt werden?

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **7** eine Lösung ist. Im *1. Schritt* zeichnen wir in den großen Kreis ein einbeschriebenes regelmäßiges Sechseck (dessen Seiten sind gleich dem Radius, also 6 cm). Wir betrachten nun sechs Kreisscheiben mit dem Radius 3 cm, so dass ihre Durchmesser (6 cm) Sechsecksseiten sind und eine siebte Kreisscheibe, die denselben Mittelpunkt hat, wie der große Kreis. Der Mittelpunkt des großen Kreises sei *O*, die eine Seite des Sechsecks *AB*, der Mittelpunkt von *AB* sei *C*, der Mittelpunkt von *OB* sei *D* (siehe Figur).

Im *2. Schritt* zeigen wir, dass auf diese Weise eine vollständige Überdeckung entsteht.

<u>Bezeichnung</u>: Die kleine Kreisscheibe mit dem Durchmesser *AB* wird im Folgenden *1. Kreisscheibe*, die kleine Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt *O* *2. Kreisscheibe* genannt.



<u>1. Feststellung</u>: Die *1. Kreisscheibe* und die *2. Kreisscheibe* haben *D* als gemeinsamen Punkt (es folgt aus der Konstruktion).

<u>2. Feststellung</u>: Es reicht zu zeigen, dass die *1. Kreisscheibe* alle Punkte der großen Kreisscheibe überdeckt, die im Inneren des Winkels *COB und* außer-

halb der *2. Kreisscheibe* liegen.
Beachte: Dass die anderen Punkte der großen Kreisscheibe auch überdeckt sind, muss nicht getrennt bewiesen werden. Es folgt aus Symmetriegründen.
Behauptung: Die *1. Kreisscheibe* deckt alle Punkte der großen Kreisscheibe ab, die sich im Inneren des Winkels *COB und* außerhalb der *2. Kreisscheibe* liegen.
Beweis der Behauptung: Es ist zu zeigen, dass für einen Punkt P im Inneren des Winkels COB mit $3\ \text{cm} < \overline{OP} \leq 6\ \text{cm}$ gilt: $\overline{CP} \leq 3\ \text{cm}$.
Hilfskonstruktion: Es sei Q jener Punkt der Strecke OB, so dass $\overline{OP} = \overline{OQ}$.
3. Feststellung: Q liegt auf der Strecke BD.
4. Feststellung: $\overline{CP} \leq \overline{CQ}$. Begründung: Die Dreiecke $\Delta\, COP$ und $\Delta\, COQ$ haben zwei gleiche Seiten (CO ist eine gemeinsame Seite und $\overline{OP} = \overline{OQ}$) und der von den paarweise gleichen Seiten eingeschlossene Winkel ist im $\Delta\, COQ$ größer oder gleich als der entsprechende Winkel im $\Delta\, COP$.
5. Feststellung: $\overline{CQ} \leq 3\ \text{cm}$. Begründung: Im gleichseitigen Dreieck $\Delta\ BCD$ mit der Seitenlänge 3 cm wurde C mit dem Punkt Q der gegenüberliegenden Seite verbunden. Daher kann CQ nicht länger sein als CD und $\overline{CD}$ = 3 cm.
Damit ist die Behauptung bewiesen.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **8** eine Lösung ist. Dazu reicht es, wenn wir zu den 7 kleinen Kreisscheiben aus Teil 1 eine weitere Kreisscheibe hinzufügen.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **9** eine Lösung ist. Dazu reicht es, wenn wir zu den 7 kleinen Kreisscheiben aus Teil 1 zwei weitere Kreisscheiben hinzufügen.
In **Teil 4** zeigen wir, dass 6 keine Lösung ist.
6. Feststellung: Der größte Abstand zweier Punkte einer kleinen Kreisscheibe beträgt 6 cm (Endpunkte eines Durchmessers).
7. Feststellung: Die Kreislinie des großen Kreises muss überdeckt werden.
8. Feststellung: Ein kleiner Kreis kann höchstens ein Sechstel der großen Kreislinie abdecken (wenn wir die große Kreislinie in sechs gleiche Teile teilen, beträgt der Abstand zweier benachbarten Punkte 6 cm, siehe noch die 6. Feststellung).
Aus der 6-ten, 7-ten und 8. Feststellung folgt:
9. Feststellung: Um die Kreislinie des großen Kreises abzudecken, braucht man mindestens 6 kleine Kreisscheiben.
10. Feststellung: Die 6 kleinen Kreisscheiben aus der 9. Feststellung können die große Kreisscheibe nicht vollständig überdecken. Begründung: Keine von ihnen kann durch den Mittelpunkt O gehen (sonst würden sie die große Kreislinie nur berühren).
Beachte: Da 6 keine Lösung ist, kann 5 ebenso keine Lösung sein.

(A) 3% **(B)** 3% **(C) 37%** **(D) 62%** **(E) 75%**