

„Blick ins Buch“ Bolyai Teamwettbewerb 2017

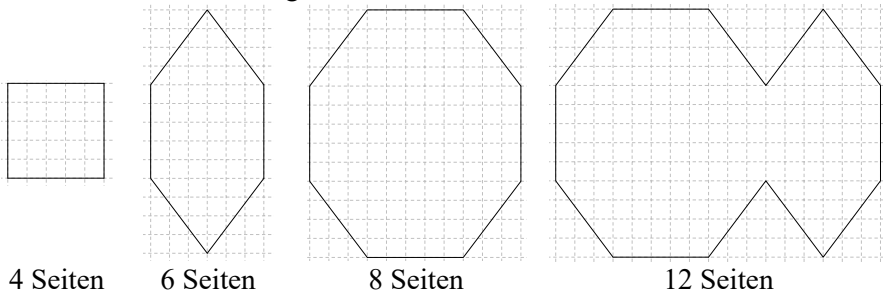
Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

Klasse 11

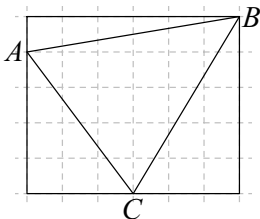
4. Alle Eckpunkte eines Vielecks sind Gitternetzpunkte *und* alle Seiten des Vielecks sind gleich lang. Wie viele Seiten kann ein solches Vieleck insgesamt haben?

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 12

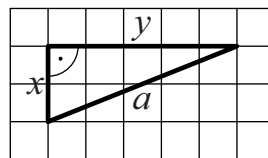
Lösung: In Teil 1 zeigen wir, dass **4, 6, 8** und **12** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an. Die Seitenlängen betragen überall 5 Längeneinheiten. Bei den „schrägen“ Linien haben wir den vom Satz des Pythagoras bekannten Zusammenhang $5^2 = 3^2 + 4^2$ verwendet.



In Teil 2 zeigen wir, dass 3 (d. h. ein gleichseitiges Dreieck) keine Lösung ist. Dazu nehmen wir an, es gäbe ein gleichseitiges Dreieck ABC , dessen Ecken alle Gitternetzpunkte wären und dessen Seitenlänge a sei und untersuchen die Folgen dieser Annahme. Dem Dreieck kann ein Rechteck umschrieben werden, dessen Eckpunkte Gitternetzpunkte sind (Figur 1).



Figur 1



Figur 2

1. Feststellung: Die Fläche des Dreiecks ABC erhält man, indem man von der Fläche des Rechtecks die Fläche von drei rechtwinkligen Dreiecken abzieht.

Beachte: Wenn eine Seite des Dreiecks ABC waagrecht oder senkrecht verläuft, gibt es nur zwei solche Dreiecke. Für den Gedankengang ist dies jedoch

ohne Bedeutung.

2. Feststellung: Der Flächeninhalt des Rechtecks und die Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke aus der 1. Feststellung sind rationale Zahlen (dies liegt daran, dass die Koordinaten der Gitternetzpunkte ganze Zahlen sind).

Aus der 1. und 2. Feststellung folgt:

3. Feststellung: Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist rational.

4. Feststellung: Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks ist $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

5. Feststellung: Der Term a^2 stellt eine rationale Zahl dar. Begründung: a ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten ganze Zahlen sind (siehe *Figur 2*). Mit dem Satz des Pythagoras folgt: $a^2 = x^2 + y^2$.

Daher gilt: a^2 ist eine ganze Zahl und damit rational.

Also ist der Term $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ irrational (da $\sqrt{3}$ irrational ist). Dies stellt einen

Widerspruch zur 3. Feststellung dar. Damit kann es das angenommene Dreieck ABC nicht geben und 3 kann keine Lösung sein.

(A) 20% (B) 83% (C) 35% (D) 39% (E) 47%

8. Wie viele Punkte lassen sich in der Ebene finden, die folgende Eigenschaft haben: Beliebige drei dieser Punkte bilden ein gleichschenkliges Dreieck.

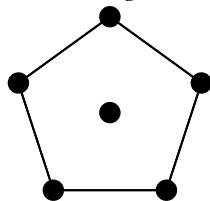
(A) 4 Punkte (B) 5 Punkte (C) 6 Punkte (D) 7 Punkte (E) 8 Punkte

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **6** eine Lösung ist. Dazu geben wir folgendes Beispiel an: Die 5 Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks und dessen Mittelpunkt (siehe *Figur 1*). In *Figur 2* sind einige der möglichen Dreiecke eingezeichnet. Sie sind aus Symmetriegründen alle gleichschenkelig.

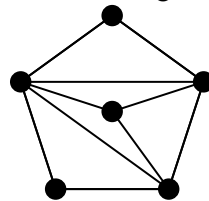
Anregung: Der geneigte Leser möge weitere Dreiecke prüfen.

Bemerkung: Es lässt sich zeigen: 6 Punkte erfüllen die Bedingungen der Aufgabe nur in der Lage aus *Figur 1*.

In **Teil 2** begründen wir, dass **5** und **4** auch Lösungen sind. Tatsächlich, es reicht, wenn wir in *Figur 1* einen Punkt bzw. zwei Punkte weglassen.



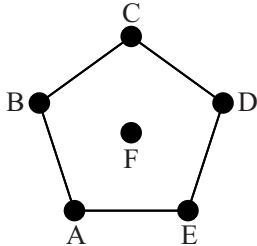
Figur 1



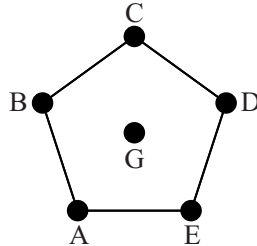
Figur 2

In **Teil 3** zeigen wir, dass **7** keine Lösung ist. Nehmen wir für einen Augenblick an, dass es doch **7** Punkte gäbe, die die Bedingungen erfüllen. Wir bezeichnen diese Punkte mit A, B, C, D, E, F und G. Betrachten wir nun die

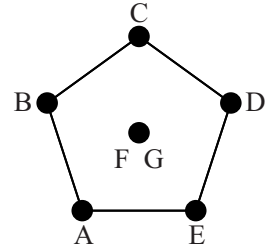
Punkte A, B, C, D, E, F. Diese 6 Punkte müssten laut **Bemerkung** so liegen wie in *Figur 3*. Betrachten wir nun die Punkte A, B, C, D, E, G. Diese 6 Punkte müssten laut **Bemerkung** ebenfalls so liegen (siehe *Figur 4*). Ein Vergleich der zwei Figuren zeigt: Die Punkte F und G fallen überein (siehe *Figur 5*). Damit haben wir aber keine 7 Punkte sondern nur 6. Damit ist bewiesen, dass 7 keine Lösung ist.



Figur 3



Figur 4



Figur 5

Beachte: Da 7 keine Lösung ist, kann 8 ebenfalls keine Lösung sein.

- (A) 69% (B) 51% (C) 35% (D) 18% (E) 21%