„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2018

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

8. Klasse / 8. Schulstufe

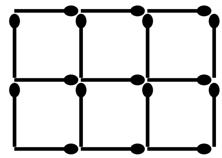
2. Eva schrieb auf ein leeres Blatt sieben verschiedene positive ganze Zahlen mit grüner Farbe. Anschließend wählte Eva zwei der grünen Zahlen aus und bildete deren Summe. Die Summe schrieb sie in roter Farbe auf das Blatt. Dieses Verfahren wiederholte sie dann für alle möglichen Paare aus zwei grünen Zahlen. **Die Frage**: Wie viele unterschiedliche rote Zahlen können sich insgesamt auf dem Blatt befinden?

(A) *10* **(B)** *11* **(C)** *13* **(D)** *21* **(E)** *22*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **11** eine Lösung ist. Wenn Eva zunächst die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 auf das Blatt schrieb, so sind folgende Summen entstanden: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Es sind insgesamt **11** Summen.
Beachte: Einige der Summen sind mehrmals entstanden. Beispiel: 8 als 1 + 7, 2 + 6 und 3 + 5. Laut Fragestellung geht es aber um *unterschiedliche* Zahlen. Daher werden jene Summen, die mehrmals erscheinen, nur einmal gezählt.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **13** eine Lösung ist. Wenn Eva zunächst die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 auf das Blatt schrieb, so sind folgende Summen entstanden: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Es sind insgesamt **13** Summen.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **21** eine Lösung ist. Wenn Eva zunächst die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 auf das Blatt schrieb, so sind folgende Summen entstanden: 3, 5, 6, 9, 10, 12, 17, 18, 20, 24, 33, 34, 36, 40, 48, 65, 66, 68, 72, 80, 96. Es sind insgesamt **21** Summen.
In **Teil 4** zeigen wir, dass 10 keine Lösung ist. Tatsächlich, egal welche sieben Zahlen Eva aufs Blatt schrieb, es gibt stets mindestens 11 verschiedene Summen. Wir schildern das Phänomen an den sieben Zahlen aus Teil 1:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. In diesem Fall entstehen folgende 11 verschiedene Summen:
1 + 2 = 3, 1 + 3 = 4, 1 + 4 = 5, 1 + 5 = 6, 1 + 6 = 7, 1 + 7 = 8, 2 + 7 = 9,
3 + 7 = 10, 4 + 7 = 11, 5 + 7 = 12, 6 + 7 = 13.
Beachte: Bei anderen Zahlen kann man die 11 Summen ähnlich bilden.
In **Teil 5** zeigen wir, dass 22 keine Lösung ist. Tatsächlich, egal welche sieben Zahlen Eva auch aufs Blatt schrieb, es gibt stets höchstens 21 verschiedene Summen. Wir schildern das Phänomen an den sieben Zahlen aus Teil 3:
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Alle 21 Summen aus Teil 3 kommen *nur einmal* vor d, h. es gibt *keine Wiederholungen* (wie z. B. 1 + 7 = 2 + 8). Daraus folgt, dass 21 die größte Anzahl der Summanden darstellt. 22 ist daher nicht möglich.

(A) 7% **(B) 20%** **(C) 13%** **(D) 70%** **(E)** 6%

12. Das nebenstehende Rechteck besteht aus 17 Streichhölzern und 6 kleinen Quadraten. Jemand legt aus 52 Streichhölzern ein neues Rechteck, das ebenfalls aus solchen kleinen Quadraten besteht. Aus wie vielen Streichhölzern kann der Umfang des neuen Rechtecks insgesamt bestehen?



Bemerkung: Die Seite jedes kleinen Quadrates ist ein ganzes Streichholz.

(A) *20* **(B)** *24* **(C)** *36* **(D)** *44* **(E)** *48*

Lösung: In **Teil 1** führen wir Bezeichnungen ein und formulieren einige Feststellungen. Das neue Rechteck hat die Form $m \times n$. Genauer: In jeder Zeile sind m, in jeder Spalte sind n Quadrate (m und n sind positive ganze Zahlen).

1. Feststellung: Es gibt insgesamt $(m+1)\cdot n$ senkrechte Streichhölzer.

2. Feststellung: Es gibt insgesamt $(n+1)\cdot m$ waagerechte Streichhölzer.

Erläuterung an der Figur aus dem Aufgabentext: $m = 3$ und $n = 2$. Es gibt insgesamt 8 senkrechte Streichhölzer, und $(3+1)\cdot 2 = 8$. Es gibt ferner insgesamt 9 waagerechte Streichhölzer, und $(2+1)\cdot 3 = 9$. Und 8 + 9 = 17, es stimmt also.

3. Feststellung: Das neue Rechteck hat insgesamt $(m+1)\cdot n + (n+1)\cdot m$ Streichhölzer. Oder, umgeformt: $nm + m + mn + n = 2mn + m + n$.

Andererseits besteht das Rechteck aus 52 Streichhölzern. Daraus folgt:

4. Feststellung: $2mn + m + n = 52$ (1)

In **Teil 2** ermitteln wir m und n. Dazu formen wir zunächst (1) geschickt um.

(1) mal 2 ergibt $4mn + 2m + 2n = 104$ (2)

(2) plus 1 liefert $4mn + 2m + 2n + 1 = 105$ (3)

Es gilt: $4mn + 2m + 2n + 1 = (2m+1)(2n+1)$ (4)

Probe durch Ausmultiplizieren: $(2m+1)(2n+1) = 4mn + 2m + 2n + 1$.

Aus (3) und (4) folgt: $(2m+1)(2n+1) = 105$ (*)

Wir zerlegen nun 105 in ein Produkt von zwei positiven ganzen Zahlen auf allen möglichen Arten: 105 = $1\cdot 105 = 3\cdot 35 = 5\cdot 21 = 7\cdot 15$ (**)

Durch (*) und (**) ergeben sich folgende Fälle:

1. Fall: $2m + 1 = 1$ und $2n + 1 = 105 \Rightarrow m = 0$ und $n = 52$. Dies geht jedoch nicht, da m streng positiv sein muss.

2. Fall: $2m + 1 = 3$ und $2n + 1 = 35 \Rightarrow m = 1$ und $n = 17$.

3. Fall: $2m + 1 = 5$ und $2n + 1 = 21 \Rightarrow m = 2$ und $n = 10$.

4. Fall: $2m + 1 = 7$ und $2n + 1 = 15 \Rightarrow m = 3$ und $n = 7$.

Beachte: Fälle wie z. B. $2n + 1 = 5$ und $2m + 1 = 21$ liefern nichts Neues, da $m = 10$ und $n = 2$ bekannte Ergebnisse sind bzw. 10×2 und 2×10 ergeben dasselbe Rechteck.

In **Teil 3** berechnen wir die einzelnen Umfänge. Dazu arbeiten wir mit den Ergebnissen aus den Fällen 2., 3. und 4. aus Teil 2. Die Formel für den Um-

fang lautet $U = 2 \cdot (m + n)$. $m = 1$ und $n = 17 \Rightarrow U = 2 \cdot (1 + 17) = \mathbf{36}$,
$m = 2$ und $n = 10 \Rightarrow U = 2 \cdot (2 + 10) = \mathbf{24}$,
$m = 3$ und $n = 7 \Rightarrow U = 2 \cdot (3 + 7) = \mathbf{20}$.

(A) 55% **(B) 37%** **(C) 27%** **(D)** 4% **(E)** 4%