„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2018

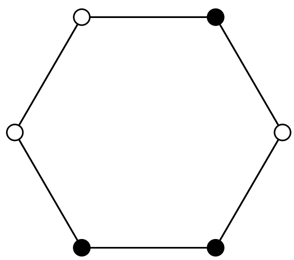
Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

Klasse 9

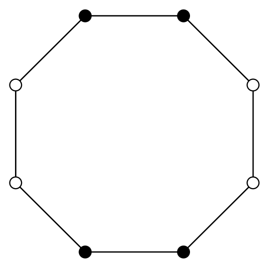
5. Jeder Eckpunkt eines regelmäßigen Vielecks wurde entweder rot oder grün markiert. Unter allen Dreiecken, deren Eckpunkte drei gleichfarbige Eckpunkte des Vielecks sind, gibt es kein gleichschenkliges Dreieck. **Die Frage**: Wie viele Eckpunkte kann das regelmäßige Vieleck insgesamt haben?
Bemerkung: Die Frage bezieht sich auf die unten aufgeführten Zahlen.

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **6** und **8** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an. (Weiß steht für Grün, Schwarz für Rot).

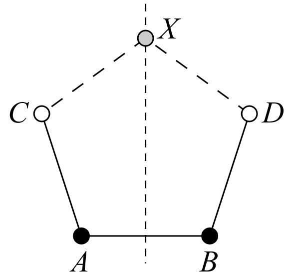


Figur 1



Figur 2

Figur 1 ist ein regelmäßiges Sechseck, *Figur 2* ein regelmäßiges Achteck. Die Bedingung ist erfüllt.
Anregung: Der geneigte Leser möge dies an einigen Dreiecken prüfen.
In **Teil 2** zeigen wir, dass 5, 7 und 9 keine Lösungen sind.
Behauptung: Kein Vieleck mit einer ungeraden Anzahl von Eckpunkten kann die Bedingung der Aufgabe erfüllen.
Beweis: Betrachten wir dazu ein regelmäßiges Vieleck mit einer ungeraden Anzahl von Eckpunkten, deren Eckpunkte entweder mit Grün oder mit Rot markiert sind.
1. Feststellung: Das Vieleck hat zwei benachbarte Eckpunkte, die dieselbe Farbe haben. Begründung: Wenn sich Grün und Rot überall abwechselten, müsste das Vieleck eine gerade Anzahl von Eckpunkten haben. Veranschaulichung an einem Beispiel: G-R-G-R-G-R-G-R-G-R-G-R.
Die zwei Eckpunkte aus der 1. Feststellung seien A und B (z. B. beide rot, siehe *Figur 3*).



Figur 3

Beachte: *Figur 3* kann ein Fünfeck sein, aber auch ein anderes regelmäßiges Vieleck mit einer ungeraden Anzahl von Eckpunkten.
Nun führen wir eine Fallunterscheidung durch.
1. Fall: Mindestens einer der benachbarten Eckpunkte *C* und *D* ist ebenfalls rot. Dann gäbe es aber ein gleichschenkliges einfarbiges Dreieck (z. B. wenn *C* rot wäre, wäre das Dreieck *ABC* gleichschenklig). Dies geht aber nicht.
2. Fall: Beide Eckpunkte C und D sind grün.
2. Feststellung: Die Mittelsenkrechte der Seite *AB* geht durch einen Eckpunkt *X* des Vielecks. Begründung: Die Mittelsenkrechte ist gleichzeitig auch eine Symmetrieachse des Vielecks. Wenn *X* rot ist, dann ist das einfarbige Dreieck *ABX* gleichschenklig. Wenn *X* grün ist, dann ist das Dreieck *CDX* gleichschenklig. Dies geht aber nicht.
Damit ist die Behauptung bewiesen. Da 5, 7 und 9 ungerade Zahlen sind, stellen sie somit keine Lösungen dar.

(A) 17% **(B) 43%** **(C)** 26% **(D) 41%** **(E)** 26%

12. Die Felder eines 5×5 Brettes werden mit den Zahlen von 1 bis 25 belegt. In jedes Feld kommt genau eine Zahl und jede der Zahlen wird genau einmal verwendet. Unter *Abstand* zweier Felder mit mindestens einem gemeinsamen Eckpunkt verstehen wir die positive Differenz der zwei Zahlen, die in diesen Feldern stehen. Unter *Durchmesser* des Brettes verstehen wir den größten aller dieser Abstände.
Die Frage: Was kann der Durchmesser des Brettes sein?

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **6**, **7**, **8** und **9** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Durchmesser 6

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
23	22	21	24	25

Durchmesser 7

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
24	22	23	21	25

Durchmesser 8

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
25	22	23	24	21

Durchmesser 9

Die schraffierten Felder zeigen, wie der Durchmesser zu Stande kommt.
In **Teil 2** zeigen wir, dass 5 keine Lösung ist. Betrachten wir dazu ein mit den Zahlen 1 bis 25 belegtes 5x5 Brett.
1. Feststellung: Wenn wir bei dem Feld mit der Zahl 1 starten und uns stets auf benachbarte Felder (Felder mit mindestens einem gemeinsamen Eckpunkt) fortbewegen, können wir in höchstens 4 Schritten das Feld mit der Zahl 25 erreichen.
Anregung: Der geneigte Leser möge dies an einigen Beispielen aus Teil 1 selbst prüfen.

2. Feststellung: Die Summe der Abstände jedes denkbaren Weges aus der 1. Feststellung beträgt mindestens 24 (25 – 1, die Differenzen sind positiv).
3. Feststellung: Es muss bei jedem Weg aus der 1. Feststellung mindestens einen Schritt geben, bei dem der Abstand mindestens 6 beträgt. Begründung: Ansonsten wäre die Summe der vier Abstände höchstens $4 \cdot 5 = 20$, was aber wegen der 2. Feststellung nicht geht.
Aus der 3. Feststellung folgt, dass der Durchmesser des Brettes mindestens 6 beträgt. Dies bedeutet, dass 5 keine Lösung ist.

(A) 30%	**(B) 34%**	**(C) 24%**	**(D) 21%**	**(E) 21%**