„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2018

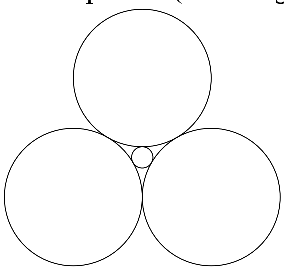
Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

12. Klasse / 12. Schulstufe

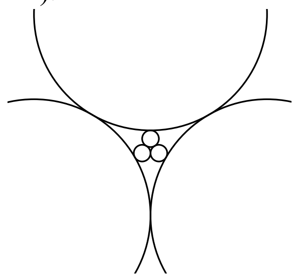
1. Jemand hat einige Kreisscheiben auf einen Tisch gelegt. Jede Kreisscheibe berührt genau drei andere Kreisscheiben. Wie viele Kreisscheiben können insgesamt auf dem Tisch liegen?

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **4** und **6** Lösungen sind. Dazu geben wir jeweils ein Beispiel an (siehe *Figur 1* und *Figur 2*).

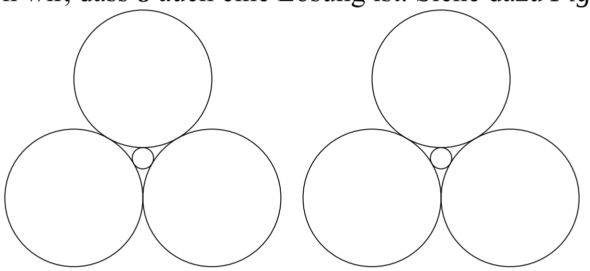


Figur 1



Figur 2

In **Teil 2** zeigen wir, dass **8** auch eine Lösung ist. Siehe dazu *Figur 3*.



Figur 3

In **Teil 3** zeigen wir, dass 5 keine Lösung ist. Tatsächlich: Wenn es genau 5 Kreisscheiben gäbe und jede genau drei berührte, dann gäbe es $5 \cdot 3 = 15$ Berührpunkte. Da jeder Berührpunkt auf genau zwei Kreisen liegt, werden sie doppelt gezählt. Um das richtige Ergebnis zu erhalten, müssten wir 15 noch durch 2 teilen: $\frac{15}{2} = 7{,}5$. Dies geht nicht, da die Anzahl der Berührpunkte ganzzahlig sein muss. Damit ist bewiesen, dass 5 keine Lösung ist.
Beachte: Ähnlich lässt sich zeigen, dass 7 ebenfalls keine Lösung ist.

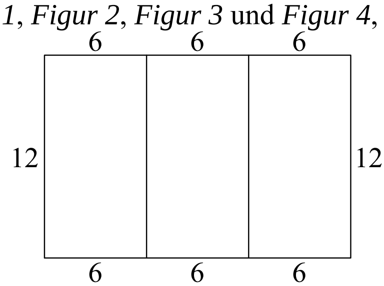
Anregung: Der geneigte Leser möge dies wie in Teil 3 prüfen.
Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass keine ungerade Zahl eine Lösung ist.

(A) 62% **(B)** 6% **(C) 22%** **(D)** 17% **(E) 55%**

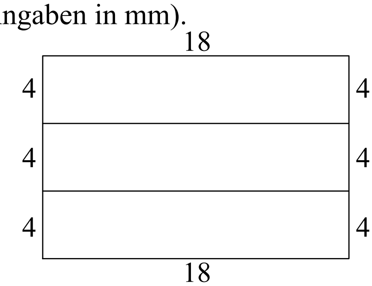
7. Ein 18 mm × 12 mm Rechteck wurde in drei Rechtecke zerlegt. Alle drei Rechtecke haben denselben Umfang. Wie viele mm lang kann ein solcher Umfang sein?

(A) *10* **(B)** *33* **(C)** *36* **(D)** *39* **(E)** *44*

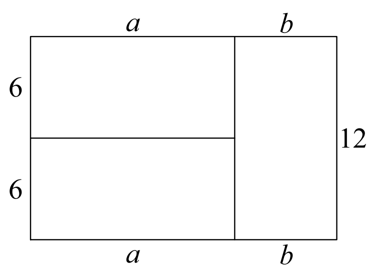
Lösung: In **Teil 1** formulieren wir einige Feststellungen. Die vier Eckpunkte des Ausgangsrechtecks sind nach der Zerlegung Eckpunkte der drei Rechtecke. Daraus folgt:
1. Feststellung: Es gibt zwei (benachbarte) Eckpunkte des Ausgangsrechtecks, die Eckpunkte eines der drei Rechtecke nach der Zerlegung sind.
Aus der 1. Feststellung folgt:
2. Feststellung: Bei der Zerlegung gibt es einen Schnitt, der parallel zu einer Seite des Ausgangsrechtecks verläuft und gleich lang mit dieser Seite ist.
Aus der 2. Feststellung folgt:
3. Feststellung: Der andere Schnitt (insgesamt gibt es genau zwei Schnitte) ist parallel oder senkrecht zum ersten Schnitt.
In **Teil 2** untersuchen wir, welche Art von Zerlegungen möglich sind. Unser Ansatz ist die 1. und die 2. Fesstellung. Es ergeben sich vier Fälle (siehe *Figur 1*, *Figur 2*, *Figur 3* und *Figur 4*, alle Angaben in mm).



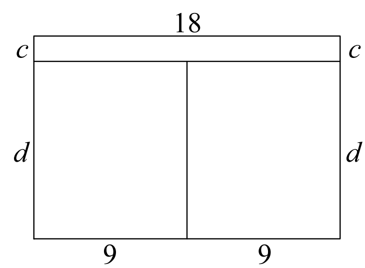
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

In **Teil 3** ermitteln wir die Umfänge. In *Figur 1* ist jeder Umfang **36** mm, in *Figur 2* ist jeder Umfang **44** mm.

In *Figur 3* gilt $a+b=18$ (*). Zwei Rechtecke haben den Umfang $2\cdot(6+a)$, das dritte Rechteck hat den Umfang $2\cdot(12+b)$. Aus der Bedingung folgt: $2\cdot(6+a)=2\cdot(12+b) \Leftrightarrow a=b+6$ (**). Mit (**) in (*) folgt b = 6 und somit ist a = 12. Die Umfänge sind $2\cdot(6+12)=2\cdot(12+6)=$ **36** mm.

In *Figur 4* gilt $c+d=12$ (*). Zwei Rechtecke haben den Umfang $2\cdot(9+d)$, das dritte Rechteck hat den Umfang $2\cdot(18+c)$. Aus der Bedingung folgt: $2\cdot(18+c)=2\cdot(9+d) \Leftrightarrow d=c+9$ (**). Mit (**) in (*) folgt c = 1,5 und somit ist d = 10,5. Die Umfänge sind $2\cdot(18+1{,}5)=2\cdot(9+10{,}5)=$ **39** mm.

(A) 0% **(B)** 3% **(C) 92%** **(D) 14%** **(E) 84%**