„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2019

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

10. Klasse / 10. Schulstufe

1. Eva trägt in die Felder einer 5×5 Tabelle alle natürlichen Zahlen von 1 bis 25 ein (in jedes Feld genau eine Zahl). Sie achtet darauf, dass sich zwei aufeinanderfolgende Zahlen stets in zwei benachbarten Feldern befinden. Anschließend notiert sie die Anzahl von Primzahlen für jede Reihe und für jede Spalte. Welche ist die größte der 10 Anzahlen, die sie dabei erhalten kann?
Bemerkung: Zwei Felder sind genau dann benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seite haben.

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **2**, **3** und **4** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an. Erläuterungen zu den Figuren: Die *kursiv* gedruckten Zahlen geben die Anzahl der Primzahlen in den einzelnen Zeilen bzw. Spalten an.

9	8	1	2	3	*2*
10	7	6	5	4	*2*
11	12	13	14	15	*2*
22	23	24	25	16	*1*
21	20	19	18	17	*2*
1	*2*	*2*	*2*	*2*	

Beispiel für **2**

1	2	3	4	25	*2*
8	7	6	5	24	*2*
9	10	11	12	23	*2*
16	15	14	13	22	*1*
17	18	19	20	21	*1*
1	*2*	*3*	*2*	*1*	

Beispiel für **3**

21	22	23	24	25	*1*
20	19	4	5	6	*2*
17	18	3	8	7	*3*
16	1	2	9	10	*1*
15	14	13	12	11	*2*
1	*1*	*4*	*1*	*2*	

Beispiel für **4**

In **Teil 2** zeigen wir, dass 1 keine Lösung ist. Begründung: Wenn in jeder Reihe genau eine Primzahl wäre, dann gäbe es nur fünf Primzahlen in der Tabelle. Zwischen 1 und 25 gibt es aber insgesamt neun Primzahlen (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23). Daher ist 1 keine Lösung.
In **Teil 3** zeigen wir, dass 5 ebenfalls keine Lösung ist. Zunächst formulieren wir einige Feststellungen.
1. Feststellung: Die geraden und die ungeraden Zahlen wechseln sich in jeder Zeile und in jeder Spalte ab. Man kann dies an den drei Beispieltabellen nachvollziehen. Der geneigte Leser möge weitere Tabellen überprüfen.
Jede Zeile und jede Spalte hat genau 5 Felder. Aus der 1. Feststellung folgt:

<u>2. Feststellung</u>: In jeder Zeile und jeder Spalte gibt es mindestens zwei gerade Zahlen.
Die geraden Zahlen sind – mit der Ausnahme von 2 – keine Primzahlen. Mit der 2. Feststellung folgt:
<u>3. Feststellung</u>: In jeder Zeile und in jeder Spalte gibt es mindestens eine Zahl, die keine Primzahl ist.
Damit ist bewiesen, dass 5 <u>keine</u> Lösung ist.

(A) 2% **(B) 3%** **(C) 60%** **(D) 32%** **(E)** 6%

12. Im Viereck *ABCD* ist *E* der Mittelpunkt der Seite *BC* und *F* der Mittelpunkt der Seite *CD*. Die Strecken *AE*, *AF* und *EF* zerlegen das Viereck in die Dreiecke *ABE*, *AEF*, *ADF* und *CEF*. Die Maßzahlen der Flächeninhalte dieser vier Dreiecke sind vier natürliche Zahlen (die Flächeneinheit ist cm^2). Schreibt man diese vier Zahlen in aufsteigender Reihenfolge auf, so stellt man fest: Es handelt sich um vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
Die Frage: Höchstens wie viele cm^2 kann der Flächeninhalt des Dreiecks *ABD* betragen?
<u>Bemerkung</u>: Alle vier Innenwinkel des Vierecks sind kleiner als 180°.

(A) *4* **(B)** *6* **(C)** *8* **(D)** *9* **(E)** *10*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass $A_{ABD} = 6\ cm^2$ möglich ist. Dazu betrachten wir das rechtwinklige Trapez aus *Figur 1*. Es gilt: $A_{CEF} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1\ cm^2$,

$A_{ABE} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2\ cm^2$, $A_{ADF} = \frac{6 \cdot 1}{2} = 3\ cm^2$, $A_{Trapez} = \frac{(6+4) \cdot 2}{2} = 10\ cm^2$. Es folgt:

$A_{AEF} = A_{Trapez} - (A_{CEF} + A_{ABE} + A_{ADF}) = 10\ cm^2 - (1\ cm^2 + 2\ cm^2 + 3\ cm^2) = 4\ cm^2$.

Die Maßzahlen der Flächeninhalte der vier Dreiecke *ABE*, *AEF*, *ADF* und *CEF* sind 1, 2, 3 und 4. $A_{ABD} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6\ cm^2$.

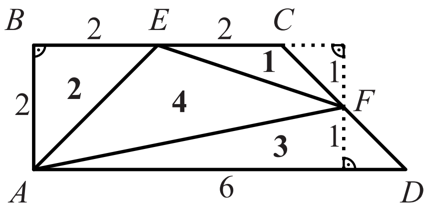
In **Teil 2** zeigen wir, dass Zahlen größer als 6 <u>keine</u> Lösung darstellen. Die Maßzahlen der Flächeninhalte der vier Dreiecke *ABE*, *AEF*, *ADF* und *CEF* seien n, $n+1$, $n+2$ und $n+3$. Die Maßzahl des Flächeninhalts des Vierecks *ABCD* ist damit $4n + 6$ ($n + n + 1 + n + 2 + n + 3$).

<u>Behauptung</u>: $A_{BCD} = 4 \cdot A_{CEF}$

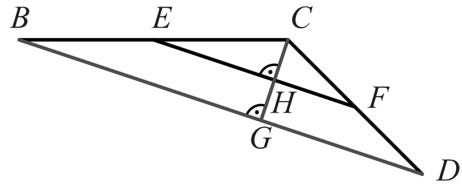
<u>Beweis</u>: $A_{BCD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{CG}}{2}$, $A_{CEF} = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{CH}}{2}$ (siehe *Figur 2*). Da *EF* Mittellinie ist, gilt: $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{EF}$ (*). Weil die Dreiecke *BCD* und *ECF* ähnlich sind, ist $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{CH}$ (**). Mit Hilfe von (*) und (**) folgt:

$$A_{BCD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{CG}}{2} = \frac{2\overline{EF} \cdot 2\overline{CH}}{2} = 4 \cdot \frac{\overline{EF} \cdot \overline{CH}}{2} = 4 \cdot A_{CEF}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.



Figur 1



Figur 2

Wir untersuchen nun A_{BCD}. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle.

<u>1. Fall</u>: $A_{CEF} = n$ cm². Wegen der Behauptung ist $A_{BCD} = 4n$ cm². Es gilt:

$A_{ABD} = A_{ABCD} - A_{BCD} = 4n + 6 - 4n = 6$

<u>2. Fall</u>: $A_{CEF} > n$ cm². Wegen der Behauptung ist $A_{BCD} > 4n$ cm². Es gilt:

$A_{ABD} = A_{ABCD} - A_{BCD} < 4n + 6 - 4n = 6$

Aus $A_{ABD} = 6$ und $A_{ABD} < 6$ folgt $A_{ABD} \leq 6$. Wir haben also bewiesen, dass **6** nicht überschritten werden kann.

In der Aufgabenstellung geht es darum, wie viele cm² groß der Flächeninhalt des Dreiecks *ABD höchstens* sein kann.

(A) 11% **(B) 15%** **(C)** 16% **(D)** 24% **(E)** 13%